TESIS - SM 142501

BILANGAN DOMINASI BERJARAK DUA PADA GRAF PRISMA DAN SUBDIVISI HOMOGENNYA

TRISNA RUSDIANA DEWI
NRP 1215 201 002

Dosen Pembimbing:
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2017

THESIS
SM 142501

DOMINATING NUMBER OF DISTANCE TWO OF PRISM GRAPHS AND HOMOGEN SUBDIVISION

TRISNA RUSDIANA DEWI
NRP 1215 201 002

Supervisor:
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

MASTER DEGREE
MATEMATIKA DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2017

BILANGAN DOMINASI BERJARAK DUA PADA GRAF PRISMA DAN SUBDIVISI HOMOGENNYA

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
TRISNA RUSDIANA DEWI
NRP. 1215 201 002

Tanggal Ujian : 12 Juni 2017
Periode Wisuda : September 2017

Disetujui oleh :

Dr. Darmaji, S.Si., M.T. (Pembimbing)
NIP. 19691015 199412 1 001

Dr. Budi Setiyono, S.Si., M.T. (Penguji)
NIP. 19720207 199702 1 001

Dr. Chairul Imron, MI.Komp. (Penguji)
NIP. 19611115 198703 1 003

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si. (Penguji)
NIP. 19830517 200812 1 003

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Dekan FMIPA,

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

BILANGAN DOMINASI BERJARAK DUA PADA GRAF PRISMA DAN SUBDIVISI HOMOGENNYA

Nama Mahasiswa	:	Trisna Rusdiana Dewi
NRP	:	1215 201 002
Dosen Pembimbing	:	Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

ABSTRAK

Dalam penelitian ini ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada graf Prisma. Selain itu, ditentukan juga jarak satu dan jarak dua pada subdivisi homogen graf Prisma. Selanjutnya mencari relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan dua dari hasil yang diperoleh. Bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua pada suatu graf tidak memiliki relasi secara umum. Hal ini karena beberapa faktor, seperti jarak antar simpul, pemilihan simpul elemen himpunan dominasi, derajat setiap simpul, diameter dan sebagainya.

***Kata kunci*:** bilangan dominasi, himpunan dominasi, graf prisma, subdivisi homogen

DOMINATING NUMBER OF DISTANCE TWO OF PRISM GRAPHS AND HOMOGEN SUBDIVISION

Name	:	Trisna Rusdiana Dewi
NRP	:	1215 201 002
Supervisor	:	Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

ABSTRACT

This research focus on the dominating number of distance two of Prism graphs. Then, also determine of distance one and two of homogen subdivision of prism graphs. Futhermore, we will determine the relation between dominating number of distance one and two of the results which have been obtained. Dominating number of distance one and distance two for any graphs do not have general relation. These are caused by several factors such as distance for every vertex, determine the dominating set vertex elements, degree of every vertex, diameter, and etc.

***Keywords*:** dominating number, dominating set, prism graphs, homogen subdivision

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul

"Bilangan Dominasi Berjarak Dua pada Graf Prisma dan Subdivisi Homogennya"

dengan baik. Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan tesis ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Bapak Dr. Darmaji, M.T. selaku dosen pembimbing atas segala bantuan, bimbingan, arahan dan motivasinya dalam mengerjakan Tesis sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

2. Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp., Dr. Budi Setiyono, S.Si., M.T., Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tesis ini.

3. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. selaku Dekan FMIPA ITS yang telah membimbing dan motivasi selama menempuh pendidikan magister.

4. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si., M.T. selaku Ketua Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

5. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si., selaku Ketua Program Studi Pascasarjana Matematika ITS yang telah memberi bimbingan selama menempuh pendidikan magister.

6. Bapak Dr. Subiono, M.Sc. selaku dosen wali yang telah membimbing dan motivasi selama menempuh pendidikan magister.

7. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika FMIPA ITS yang telah mendidik penulis baik di dalam maupun di luar perkuliahan serta Bapak dan Ibu staf Tata Usaha Jurusan Matematika ITS.

8. Kedua orang tua Bapak Yoyok Suhariyadi, Ibu Sri Winarti dan keluarga tercinta, Adek Rizky Dwi Pratiwi terima kasih atas perhatian doa dan segala dukungannya, beserta Bapak Hengky Putra Raharjo dan Mas Imam Sofi'i, terima kasih atas dukungan, motivasi, perhatian, waktu dan doa yang telah diberikan selama penulis menempuh studi di ITS.

9. Keluarga besar Pascasarjana Matematika ITS 2015, Ridho Alfarisi, Ida Ayu Putu Ari Utari, Echa Ayu Fatmawati dan Trifena P. Lesnussa yang telah menemani, membantu, mendoakan, dan memberikan semangat kepada penulis.

10. Teman-teman S2 Matematika ITS khususnya angkatan 2015 semester gasal maupun genap atas persahabatan dan kenangan selama penulis menempuh pendidikan di Pascasarjana Matematika ITS, serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa dalam Tesis ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan untuk kesempurnaan Tesis ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dan memberikan kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru khususnya dalam bidang teori graf.

Surabaya, Juni 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

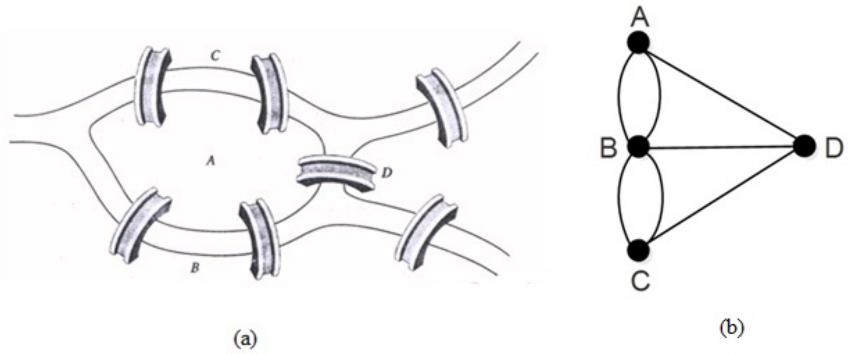
DAFTAR SIMBOL

$G(V, E)$	Graf G dengan himpunan simpul V dan himpunan sisi E
$V(G)$	Himpunan simpul graf G
$E(G)$	Himpunan sisi graf G
$\|G\|$	*Order* graf G (banyak simpul graf G)
$\parallel G \parallel$	*Size* graf G (banyak sisi graf G)
$d(u, v)$	Jarak dari simpul u ke simpul v
$deg(v)$	Derajat dari simpul v
$\Delta(G)$	Derajat maksimum graf G
$A(G)$	Himpunan dominasi jarak satu pada graf G
$\gamma(G)$	Bilangan dominasi pada graf G
$\gamma_1(G)$	Bilangan dominasi jarak satu pada graf G
$A_2(G)$	Himpunan dominasi jarak dua pada graf G
$\gamma_2(G)$	Bilangan Dominasi jarak dua pada graf G
C_m	Graf Lingkaran order m simpul
K_2	Graf lengkap order 2 simpul
P_n	Graf lintasan order n simpul
$D_{m,n}$	Graf Prisma order m, n simpul
$S(D_{m,n})$	Subdivisi graf Prisma order m, n simpul
$S_H(D_{m,n})$	Subdivisi Homogen graf Prisma order m, n simpul
C_m^n	Graf Lingkaran C_m ke-n
P_n^m	Graf Lintasan P_n ke-m

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf sebagai cabang dari matematika diskrit merupakan pokok bahasan yang sudah lama, dan memiliki banyak terapan. Menurut Ardiansyah. dkk (2010), masalah graf muncul pertamakali pada tahun 1736. Di kota Konigsberg sebelah timur negara bagian Prussia-Jerman, sekarang bernama kota Kaliningrad, terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai.



Gambar 1.1: (a) Presentasi dari jembatan Konigsberg, (b) Graf G yang mempresentasikan jembatan Konigsberg

Pada Gambar 1.1 terdapat tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut. Dari mencoba dengan segala kemungkinan, penduduk kota sepakat bahwa memang tidak mungkin melalui setiap jembatan itu hanya sekali dan kembali lagi ke tempat asal mula jembatannya. Tahun 1736, seorang matematikawan Swiss, L. Euler adalah orang pertama yang berhasil membuktikan bahwa memang tidak mungkin melewati ketujuh jembatan tersebut tepat satu kali dan kembali ke tempat asal. Ia memodelkan permasalahan ini ke dalam graf. Graf digunakan untuk mempresentasikan obyek-obyek diskrit dan hubungan antara obyek-obyek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan obyek sebagai simpul, sedangkan hubungan antara obyek dinyatakan dengan garis.

Menurut Saputro (2015), salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah himpunan dominasi. Sejarah himpunan dominasi berawal sekitar tahun 1850-an dikalangan penggemar catur di Eropa. Mereka mempunyai masalah tentang ”dominasi ratu”, yaitu berapa banyaknya ratu yang harus ditempatkan pada papan catur berukuran 8 x 8 sehingga semua petak pada papan catur tersebut dapat diserang oleh sekurang-kurangnya salah satu dari himpunan ratu tersebut dengan satu langkah. Masalah ”dominasi ratu” pada permainan catur yang menjadi tonggak sejarah lahirnya dari himpunan dominasi pada dasarnya dapat dimodelkan dengan teori graf.

Petak pada papan catur direpresentasikan sebagai simpul pada konstruksi graf dan dua simpul dikatakan terhubung jika petak yang mewakili simpul tersebut dapat dicapai oleh ratu pada petak lain dengan satu langkah. Jumlah minimum ratu yang memungkinkan untuk menyerang semua petak pada papan catur berukuran 8 x 8 dengan satu langkah adalah bilangan dominasi ratu. Setelah dilakukan penelitian, akhirnya ditemukan bilangan dominasi ratu pada papan catur berukuran 8 x 8 adalah 5. Secara matematis, himpunan dominasi dipelajari sejak tahun 1960 yang kemudian berkembang pada berbagai aplikasi. Menurut Rofiah (2014), himpunan dominasi merupakan suatu konsep penentuan simpul seminimal mungkin pada graf dengan ketentuan simpul sebagai himpunan dominasi menjangkau simpul yang ada disekitarnya. Selain itu, terdapat pula pengembangan dalam bilangan dominasi mengenai pemadaman kebakaran. Dalam penulisan tersebut peletakan mobil kebakaran didapat dari minimum bilangan dominasi, dimana setiap mobil kebakaran dapat mendominasi beberapa wilayah yang bertetangga dengan posisi mobil kebakaran tersebut.

Penelitian tentang bilangan dominasi telah banyak dilakukan antara lain oleh Jumani (2012) yang berjudul ”*Domination Number of Prism over Cycle* C_n”. Dalam penelitian tersebut ditentukan bilangan dominasi dari operasi kartesian graf lingkaran C_n dan K_2, dimana $n \geq 3$ sedemikian $\gamma(C_n \times K_2) = \frac{n}{2}$, jika $n \equiv -4(mod\ 4)$. Snyder (2011) dalam penelitiannya ”*c-Dominating sets for families of graphs*”. Dalam tulisan tersebut ditentukan bilangan dominasi pada graf Grid untuk $G(2 \times n), G(3 \times n)$ dan $G(4 \times n)$ dengan menentukan bilangan c sedemikian $\gamma(G) = c|G|$ untuk $0 \leq c \leq 1$.

Salah satu topik bilangan dominasi suatu graf yang belum diteliti adalah suatu graf baru yang diperoleh dengan menambahkan satu atau lebih simpul yang berderajat 2 ke satu atau lebih sisi pada G. Dalam teori graf, bilangan dominasi, dinotasikan $\gamma(G)$, adalah kardinalitas minimum dari sebuah himpunan dominasi. Dan, di antara simpul merupakan elemen himpunan dominasi dengan simpul yang lainnya memiliki jarak kurang dan atau sama dengan dua. Sehingga dalam penelitian ini akan ditentukan bilangan dominasi jarak dua γ_2 dari graf-graf sederhana yaitu graf lintasan, graf lingkaran, graf prisma, serta subdivisi graf prisma. Selain itu, bilangan dominasi jarak satu pada subdivisi graf prisma yang belum pernah ditemukan juga akan diteliti. Kemudian dicari relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua dari hasil yang diperoleh. Himpunan dominasi jarak dua yang dinotasikan dengan A_2, yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian hingga simpul G yang bukan elemen A_2 memiliki jarak maksimal 2 terhadap simpul-simpul di A_2. Bilangan dominasi jarak dua γ_2 merupakan kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi jarak dua.

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, peneliti mengadakan penelitian yang berjudul ”Bilangan Dominasi Berjarak Dua pada Graf Prisma dan Subdivisinya”.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah:

1. Berapakah bilangan dominasi jarak dua pada graf Prisma?
2. Berapakah bilangan dominasi jarak satu dan dua pada Subdivisi graf Prisma?
3. Bagaimana relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan bilangan dominasi jarak dua pada Subdivisi graf Prisma?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang dibahas dalam penelitian ini dibatasi oleh ruang lingkup, antara lain:

1. Jenis graf yang digunakan pada penelitian ini adalah graf tidak berarah.
2. Ruang lingkup pada penelitian ini adalah bilangan dominasi jarak satu dan dua dari graf Prisma beserta subdivisi homogennya.
3. Subdivisi yang digunakan pada penelitian ini adalah Subdivisi Homogen dengan menyisipkan satu simpul pada setiap sisi graf prisma.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan dan batasan masalah di atas, tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui bilangan dominasi jarak dua pada graf Prisma.
2. Mengetahui bilangan dominasi jarak satu dan dua pada Subdivisi graf Prisma.
3. Mengidentifikasi relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan bilangan dominasi jarak dua pada Subdivisi graf Prisma.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini antara lain:

1. Sebagai salah satu kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup himpunan dominasi dan bilangan dominasi pada graf,
2. Sebagai salah satu kontribusi terhadap aplikasi pos pertolongan pertama (Gross dan Jay Yellen, 2006), masalah penempatan pusat radar, dll (Gupta, 2013),
3. Sebagai salah satu motivasi kepada pembaca untuk melakukan penelitian tentang bilangan dominasi jarak dua pada graf-graf yang lain atau dengan pengembangan konsep yang terkait dengan dominasi.

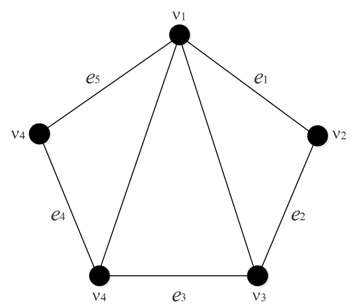
BAB II
KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Terminologi Dasar Graf

Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek dinyatakan sebagai simpul, sedangkan hubungan antar objek dinyatakan dengan garis. Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. Graf G adalah himpunan tak kosong yang berhingga dari objek-objek yang disebut simpul (*vertex*) bersama dengan himpunan pasangan tak terurut dari simpul-simpul berbeda di G yang disebut sisi (*edge*). Himpunan simpul dari G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$.

Perhatikan graf G yang memuat simpul $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ secara lebih jelas dapat dilihat pada Gambar 3.1 seperti berikut ini:



Gambar 2.1: Graf *G* yang berorder 5

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$
$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

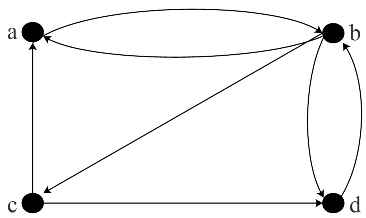
Simpul pada graf dapat dilabeli dengan huruf, angka, atau dengan menggunakan huruf dan angka. Misalkan u dan v adalah simpul-simpul pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan simpul u dan v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dilambangkan dengan e. Banyak simpul pada graf G disebut *order* dari G dinotasikan $|G|$, sedangkan banyak sisi disebut *size* dari G dinotasikan $\| G \|$. Graf yang ordernya berhingga disebut graf berhingga.

2.2 Dasar - dasar Teori Graf

Menurut Siang (2009), graf yang tidak memiliki simpul sehingga tidak memiliki garis disebut Graf Kosong. Jika semua garisnya berarah, maka grafnya disebut Graf Berarah (*Directed Graph/ Digraph*). Jika semua garisnya tidak berarah, maka grafnya disebut Graf Tak Berarah (*Undirected Graph*).

a. Graf Berarah (*Directed Graph/ Digraph*)

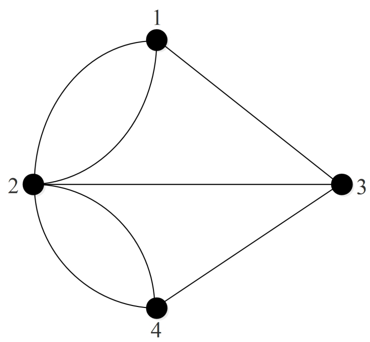
Pada Gambar 2.2 dinyatakan bahwa, graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah, biasanya menyebut sisi berarah dengan sebutan busur (arc). Pada graf berarah, (u, v) dan (v, u) menyatakan dua buah busur yang berbeda, dengan kata lain (u, v) $\neq$ (v, u). Untuk busur (u, v), simpul u dinamakan simpul asal ($initial\ vertex$) dan simpul v dinamakan simpul terminal ($terminal\ vertex$).



Gambar 2.2: Graf berarah *directed graph/ digraph*

b. Graf Tak Berarah (*Undirected Graph*)

Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak berarah. Pada Gambar 2.3 merupakan graf tak berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(u, v) = (v, u)$ adalah sisi yang sama.

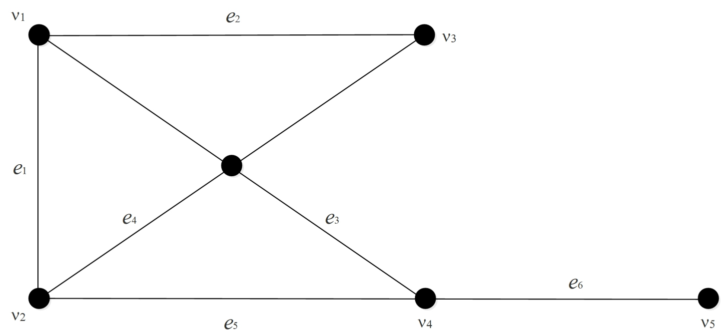


Gambar 2.3: Graf Tak Berarah (*Undirected Graph*)

2.2.1 *Adjacent* dan *Incident*

Definisi 2.2. Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan simpul u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi pada graf G, maka u dan v adalah simpul yang terhubung langsung (*adjacent*). Sedangkan u dan e, sama halnya dengan v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Jika e_1 dan e_2 berbeda pada G terkait langsung (*incident*) dengan sebuah simpul bersama, maka e_1 dan e_2 disebut sisi *adjacent*.

Untuk mempermudah penulisan, selanjutnya simpul u atau v akan disimbolkan dengan v_k, sedangkan sisi $e = (u, v)$ akan disimbolkan dengan e_l, dengan k adalah nomor dari simpul dan l adalah nomor dari sisi. Perhatikan Gambar 2.4 berikut.



Gambar 2.4: Graf G dengan simpul *Adjacent* dan *Incident*

Berdasarkan Gambar 2.4, maka simpul v_1 dan v_2 terhubung langsung (*adjacent*), demikian juga dengan v_1 dan v_3, v_1 dan v_4, serta v_4 dan v_5. Simpul v_1 dan v_5 tidak terhubung langsung, demikian juga dengan simpul v_2 dan v_5, serta simpul v_3 dan v_5.

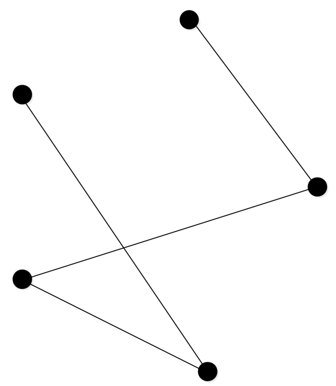
Sisi e_1 terkait langsung (*incident*) dengan simpul v_1 dan v_2. Sisi e_2 terkait langsung dengan simpul v_1 dan v_3. Sisi e_1 tidak terkait langsung dengan simpul v_3 dan v_4. Perlu diperhatikan bahwa satu sisi hanya dapat terkait langsung dengan dua simpul yang berbeda. Hal ini karena satu sisi hanya menghubungkan dua simpul yang berbeda.

2.2.2 Derajat Suatu Simpul

Misal G adalah graf, dan v adalah suatu simpul di G. Derajat v adalah banyaknya sisi yang terkait langsung pada v dan dinotasikan oleh $deg(v)$ atau $d(v)$.

Menurut Chartrand dan Lesniak (1986), derajat suatu simpul v pada sebuah graf G, ditulis dengan $deg(v)$ atau $d(v)$, adalah jumlah sisi yang *incident* pada v. Dengan kata lain, jumlah sisi yang memuat v sebagai simpul ujung. Simpul v dikatakan genap atau gasal tergantung dari jumlah $deg(v)$ genap atau gasal. Suatu simpul derajat 0 disebut suatu simpul terisolasi dan simpul yang berderajat 1 disebut simpul ujung.

Menurut Nora dan Gerhard (1994), barisan derajat adalah barisan monoton naik dari derajat simpul pada suatu graf. Jika bilangan dari barisan derajat membentuk partisi grafik, maka barisan derajat dapat dibentuk menjadi graf. Jumlah elemen dari barisan derajat pada suatu graf dengan sisi yang menghubungkan dua simpul. Perhatikan Gambar 4.7 berikut.



Gambar 2.5: Graf G yang memiliki barisan derajat $2, 2, 2, 1, 1$

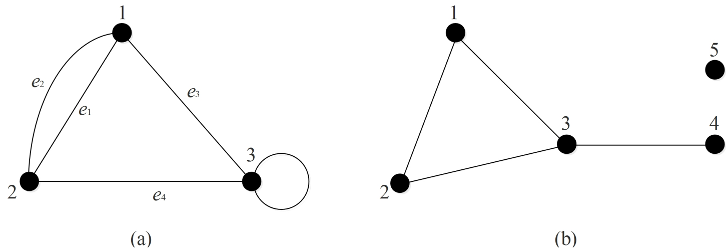
2.3 Graf Terhubung dan Graf Tidak Terhubung

Keterhubungan dua buah simpul merupakan suatu hal yang penting di dalam graf. Dua buah simpul u dan simpul v dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari u ke v dengan $u \neq v$. Jika dua buah simpul terhubung maka pasti merupakan simpul yang pertama dapat dicapai dari simpul kedua. Dan, jika setiap pasang simpul di dalam graf terhubung, maka graf tersebut dapat dikatakan graf terhubung.

Definisi 2.2.3. Graf tak berarah G disebut graf terhubung (*connected graph*), jika untuk setiap pasang simpul u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v yang juga berarti lintasan dari u ke v. Jika tidak, maka G disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*). Perhatikan Gambar 2.6 di bawah ini.

2.2.4 Graf Isomorfik (*Isomorphic Graph*)

Dua buah graf dikatakan isomorfik jika kedua graf tersebut mempunyai struktur yang sama namun berbeda cara pemberian label simpul-simpul dan sisi-sisinya, atau cara menggambarkannya. Label simpul-simpul dari graf G dan H menjadi



Gambar 2.6: (a) Graf Terhubung dan (b) Graf Tidak Terhubung

hasil dari dua graf yang sama. Gambar 2.8 merupakan salah satu contoh dari dua buah graf yang isomorfik.

Menurut Gross dan Yellen (2006), dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat suatu fungsi bijektif ϕ: $V(G_1) \longleftrightarrow V(G_2)$ sedemikian hingga simpul u dan v bertetangga dalam $G_1 \longleftrightarrow \phi(u)$ dan $\phi(v)$ bertetangga dalam G_2. Fungsi ϕ dinamakan sebuah fungsi isomorfik. Notasi dari dua buah graf G_1 dan G_2 yang isomorfik adalah $G_1 \cong G_2$. Jika graf G_1 dan G_2 isomorfik, maka kedua graf tersebut selalu memenuhi 3 syarat sebagai berikut:

1. Jumlah simpul $G_1 =$ jumlah simpul G_2 (jumlah simpul yang sama).
2. Jumlah sisi $G_1 =$ jumlah sisi G_2 (jumlah sisi yang sama).
3. Memiliki jumlah simpul berderajat tertentu yang sama dalam graf G_1 dan G_2.

Menurut Hartsfile (1994), ketiga syarat tersebut belum cukup menjamin bahwa kedua graf tersebut isomorfik. Untuk menunjukkan bahwa graf G_1 dan G_2 isomorfik, maka dapat dilihat dari matriks ketetanggaan kedua graf tersebut sama.

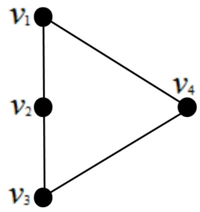
Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan n simpul, $n \geq 1$. Matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) graf G adalah dwimatra yang berukuran $n \times n$. Bila matrik tersebut dinamakan $A = [a_{i,j}]$, maka

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ dan } j \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{jika } i \text{ dan } j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$

Pada Gambar 2.7 memperlihatkan empat simpul dengan matriks ketetanggaannya.

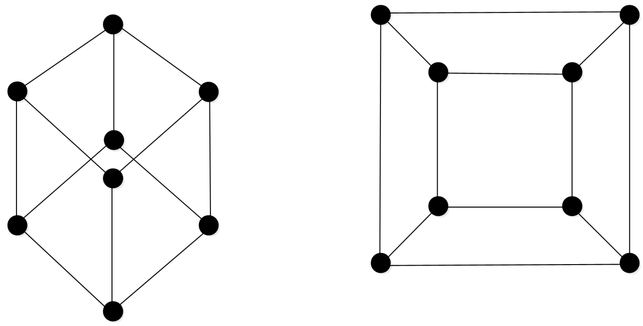
2.3 Jenis - jenis Graf

Graf-graf sederhana yang tergolong *well known graph* yang digunakan dalam penelitian ini meliputi graf Lintasan dan graf Lingkaran. Berikut definisi dari



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 2.7: Graf dengan matriks ketetanggaannya

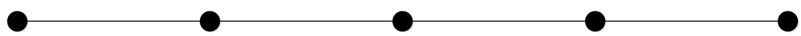


Gambar 2.8: Dua buah graf yang isomorfik

masing-masing graf tersebut.

2.3.1 Graf Lintasan

Graf Lintasan yang dinotasikan dengan P_n merupakan graf terhubung sederhana yang membentuk lintasan yang terdiri dari n simpul dan $n-1$ sisi dengan $n \geq 2$. Kedua simpul ujung pada graf ini merupakan simpul ujung, yaitu simpul dengan derajat sama dengan satu, sedangkan simpul yang lain berderajat dua.



Gambar 2.9: Graf Lintasan P_5

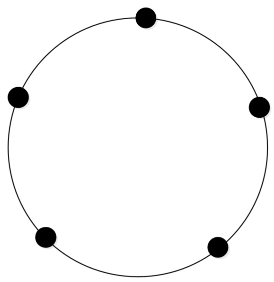
2.3.2 Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf terhubung sederhana yang memiliki n simpul dan n sisi untuk setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n dengan $n \geq 3$.

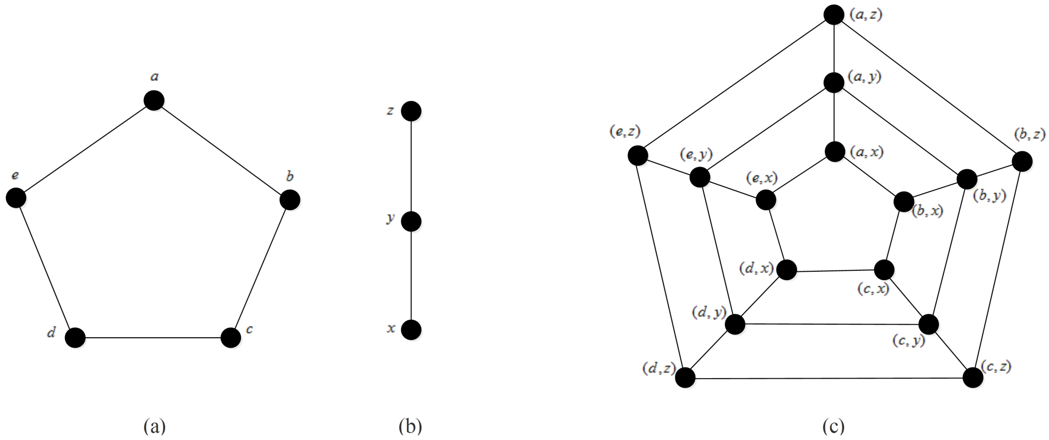
2.4 Graf Prisma

Menurut Baca dan Miller (2008), graf prisma $C_m \times P_n$ didefinisikan sebagai produk kartesian dari sebuah lingkaran C_m dengan m simpul dan sebuah lintasan P_n dengan n simpul, dengan $m, n \in N$.

Simpul-simpul pada graf prisma dinotasikan dengan dua huruf seperti $(a, x), (a, y), (a, z)$ pada Gambar 2.11 (c).



Gambar 2.10: Graf Lingkaran C_5



Gambar 2.11: (a) $G_1 = C_m$, (b) $G_2 = P_n$, dan (c) $G = C_5 \times P_3$

2.5 Subdivisi Graf Prisma

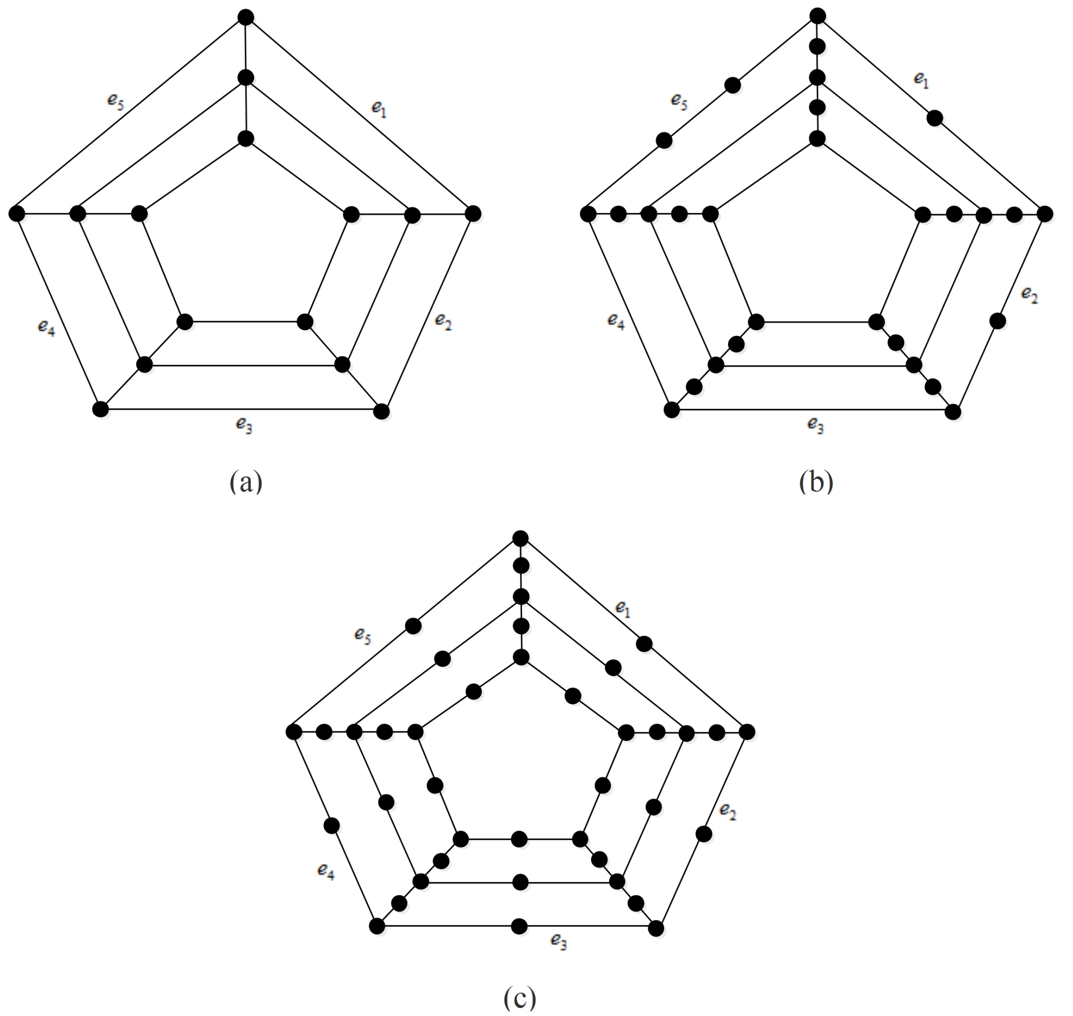
Menurut Chartrand dan Zhang (2005), subdivisi graf G dinotasikan dengan $S(G)$ adalah suatu graf baru yang ditambahkan dengan satu atau lebih simpul berderajat dua pada satu atau lebih sisi di G. Sedangkan, subdivisi homogen $S_H(G)$ adalah suatu graf baru yang diperoleh dengan menambahkan sebuah simpul berderajat dua di setiap sisi pada graf G. Perhatikan Gambar 2.12.

Gambar 2.12 (a) adalah graf prisma $C_5 \times P_3$ dengan penambahan simpul berderajat dua pada sisi e_1, e_2 dan penambahan dua simpul berderajat dua pada sisi e_5, terlihat pada Gambar 2.12 (b). Sedangkan, pada Gambar 2.12 (c) adalah subdivisi homogen dari graf prisma $S_H(C_5 \times P_3)$, yaitu penambahan satu simpul berderajat dua pada setiep sisi graf prisma pada Gambar 2.12 (a).

2.6 Himpunan Dominasi dan Bilangan Dominasi

2.6.1 Definisi Himpunan Dominasi dan Bilangan Dominasi

Menurut Haynes (1996), himpunan dominasi (*Dominating Set*) adalah suatu himpunan bagian A dari himpunan simpul $V(G)$ dimana simpul-simpul yang tidak berada pada A terhubung langsung dengan minimal satu simpul A. Himpunan

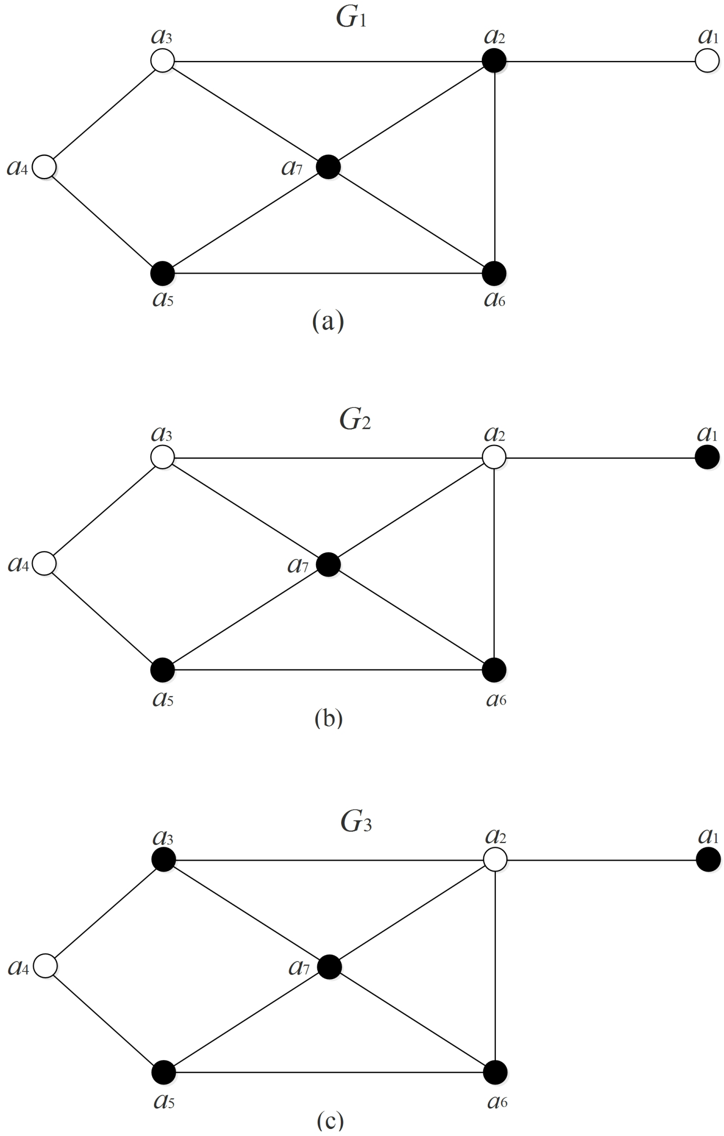


Gambar 2.12: (a) Graf prisma $C_5 \times P_3$, (b) Subdivisi Graf prisma $S(C_5 \times P_3)$, (c) Subdivisi Homogen Graf prisma $S_H(C_6 \times P_3)$ dengan menyisipkan satu simpul di setiap sisi-sisinya

dominasi minimal adalah himpunan dominasi yang tidak ada simpul yang dapat dihilangkan tanpa mengubah dominasinya. Bilangan dominasi adalah kardinalitas minimum dari sebuah himpunan dominasi. Bilangan dominasi jarak satu pada graf G dinotasikan dengan $\gamma_1(G)$.

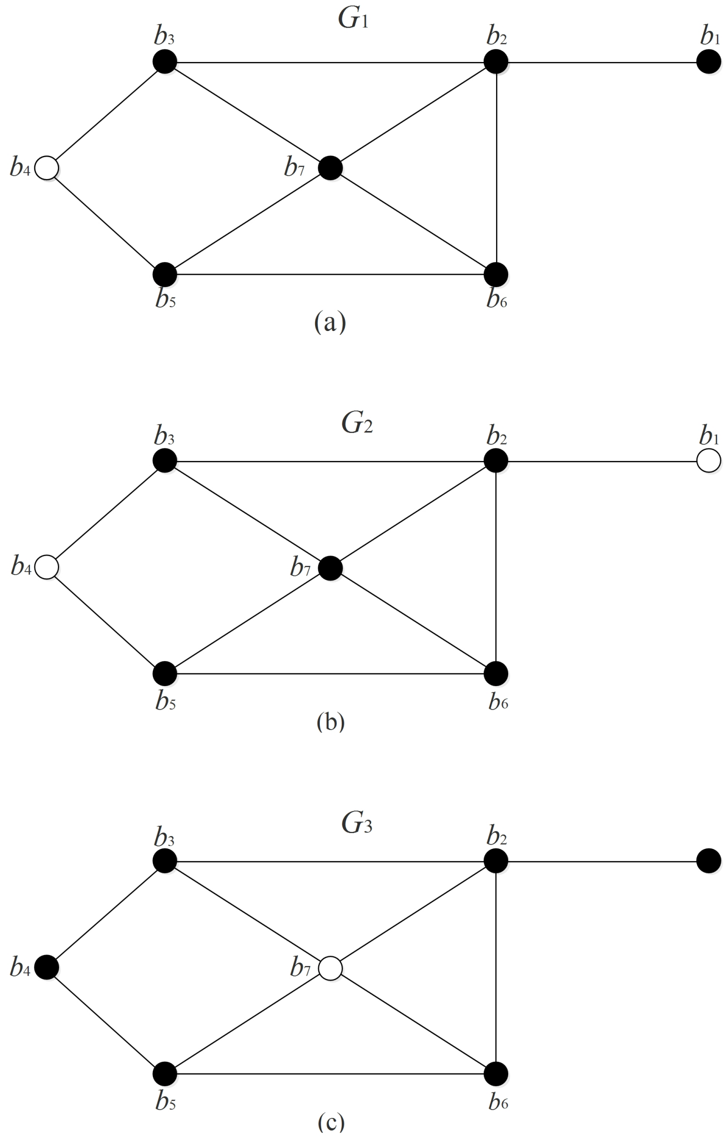
Pada Gambar 2.13 (a) menunjukkan contoh himpunan jarak satu pada suatu graf. Misalkan $A = \{a_1, a_3, a_4\}$ dari observasi tampak bahwa A bukan himpunan dominasi karena a_6 tidak didominasi oleh simpul manapun dalam A. Sekarang, misalkan $A = \{a_2, a_3, a_4\}$. Oleh karena semua simpul di graf pada Gambar 2.13 (b) didominasi oleh $a_2, a_3, a_4 \in A$, maka A adalah himpunan dominasi. Tetapi tidak dapat dikatakan bahwa $|A| = 3$ adalah bilangan dominasi, karena dapat diperoleh himpunan dominasi dengan kardinalitas yang lebih kecil, yaitu jika $A = \{a_2, a_4\}$

pada Gambar 2.13 (c). Oleh karena itu, untuk graf G tidak mungkin mempunyai himpunan pembeda dengan kardinalitas $|A| = 1$, maka himpunan dominasi dengan kardinalitas 2 adalah minimum. Dengan demikian, $\gamma_1(G) = 2$.



Gambar 2.13: Himpunan Dominasi Jarak Satu

Pada Gambar 2.14 (a) menunjukkan contoh himpunan dominasi jarak dua pada suatu graf. Misalkan $A = \{b_4\}$ dari observasi tampak bahwa A bukan himpunan dominasi, karena terdapat b_1 tidak didominasi oleh simpul manapun dalam A. Sekarang, misalkan $A = \{b_1, b_4\}$. Oleh karena semua simpul di graf pada Gambar 2.14 (b) didominasi oleh $b_1, b_4 \in A$, maka A adalah himpunan dominasi. Tetapi tidak dapat dikatakan bahwa $|A| = 2$ adalah bilangan dominasi, karena dapat diperoleh himpunan dominasi dengan kardinalitas yang lebih kecil, yaitu jika $A = \{b_7\}$ terlihat pada Gambar 2.14 (c). Oleh karena itu, untuk graf G mempunyai himpunan pembeda dengan kardinalitas $|A| = 1$. Dengan demikian, $\gamma_2(G) = 1$.



Gambar 2.14: Himpunan Dominasi Jarak Dua

2.6.2 Hasil-hasil Penelitian Bilangan Dominasi

Pada Tabel 2.1 dan Tabel 2.2 disajikan beberapa hasil penelitian mengenai bilangan dominasi jarak satu pada graf Lintasan, dan graf Lingkaran yang akan dibandingkan dengan bilangan dominasi jarak dua untuk menentukan relasinya.

Mengenai batas atas bilangan dominasi adalah banyaknya simpul pada graf. Ketika paling sedikit satu simpul yang dibutuhkan untuk himpunan dominasi di

Tabel 2.1: Hasil-Hasil Penelitian Bilangan Dominasi Jarak Satu pada Graf Sederhana

Graf	Bilangan Dominasi
Graf Lintasan (P_m)	$\gamma(P_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$
Graf Lingkaran (C_n)	$\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$

Sumber: Goddard, Henning, 2006

Tabel 2.2: Hasil-Hasil Penelitian Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Sederhana

Graf	Bilangan Dominasi
Graf Lintasan (P_m)	$\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$
Graf Lingkaran (C_n)	$\gamma_2(C_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$

Sumber: Umilasari, Reni, 2015

graf, maka $1 \leq \gamma(G) \leq n$ untuk setiap graf berordo n.

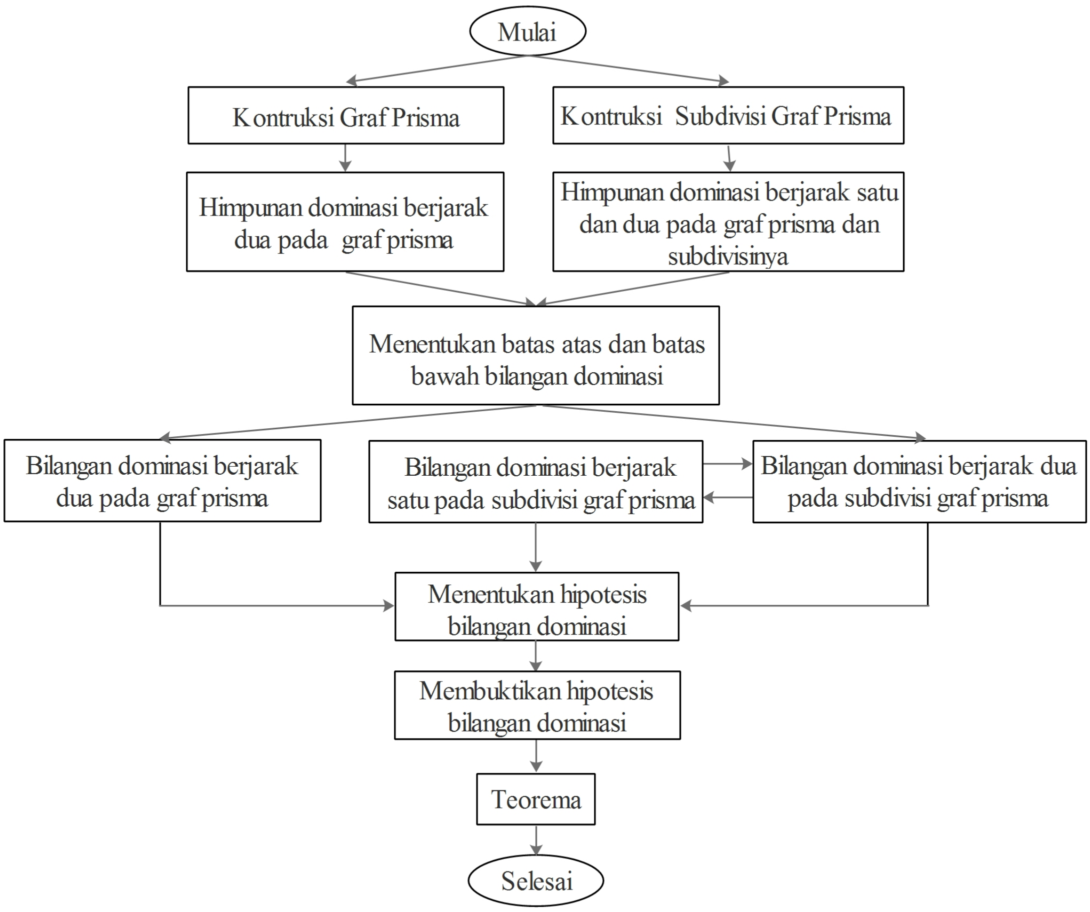
Menurut Alfarisi, dkk. (2014), hasil penelitian bilangan dominasi jarak satu pada graf prisma untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Bilangan dominasi berjarak satu graf prisma adalah $\gamma(D_{m,n}) \leq \lceil \frac{mn}{4} \rceil$. Nilai dari bilangan dominasi selalu $\gamma(G) \leq |V(G)|$. Himpunan dominasi jarak satu graf prisma dinotasikan $A(G)$, dan $A(G) \subseteq V(G)$.

BAB III
METODA PENELITIAN

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang akan digunakan dalam pengerjaan untuk mencapai tujuan penelitian dan langkah - langkahnya sebagai berikut.

1. Pemahaman konsep dan studi literatur
   Pada tahap ini dilakukan pemahaman konsep dan studi literatur dari berbagai sumber mengenai himpunan dominasi dan bilangan dominasi pada graf-graf sederhana, serta graf prisma.

2. Tahapan Penelitian



Gambar 3.1: Rancangan Penelitian

- Mengkonstruksi graf Prisma dan subdivisi homogennya.
- Menentukan himpunan dominasi jarak dua dari graf Prisma.
- Menentukan himpunan dominasi jarak satu dan dua dari subdivisi homogen graf Prisma.
- Menentukan hipotesis bilangan dominasi berdasarkan penentuan himpunan dominasi.
- Membuktikan hipotesis bilangan dominasi dari graf Prisma dan subdivisi homogennya.
- Menentukan relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan dua dari subdivisi homogen graf Prisma.

3. Evaluasi
   Pada tahap ini peneliti melakukan evaluasi terhadap analisa yang telah dikerjakan pada tahap penelitian, sehingga dapat diperoleh suatu simpulan.

4. Diseminasi hasil penelitian
   Tahap diseminasi hasil penelitian meliputi presentasi pada seminar dan publikasi *paper* dalam prosiding atau jurnal baik nasional maupun internasional.

5. Penyusunan laporan
   Laporan penelitian ditulis dalam sebuah proposal tesis dengan sistematika penulisan yang telah ditentukan, yang meliputi: Bab 1. Pendahuluan, Bab 2. Kajian Pustaka dan Dasar Teori, Bab 3. Metoda Penelitian, Bab 4. Pembahasan, serta Bab 5. Simpulan dan Saran.

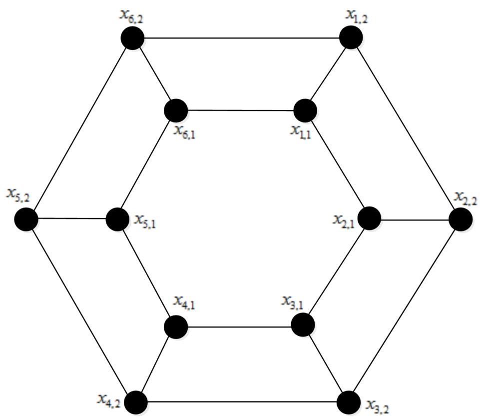
BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas bilangan dominasi jarak satu dan dua pada subdivisi graf prisma. Selanjutnya, pada penelitian ini akan dibahas hubungan antara bilangan dominasi jarak satu dan dua pada subdivisi graf prisma.

4.1 Bilangan Dominasi Jarak Dua dari Graf Prisma

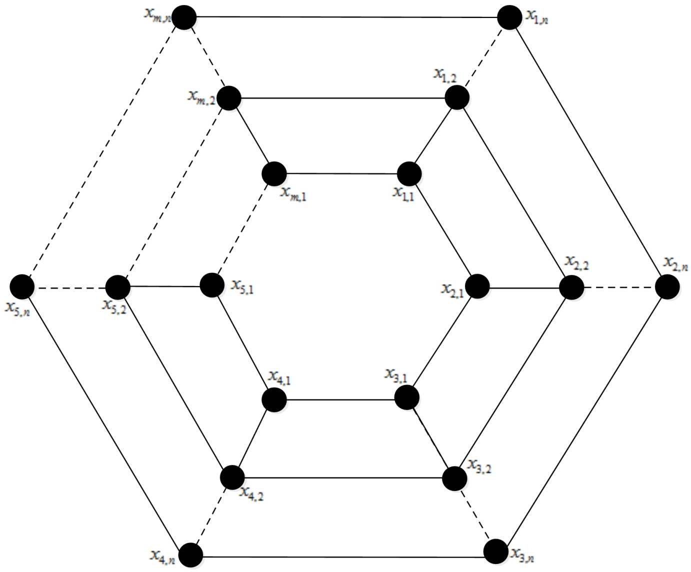
Subbab ini menjelaskan bilangan dominasi jarak dua pada graf prisma. Menurut Baca dan Miller (2008), graf prisma $C_m \times P_n$ didefinisikan sebagai produk kartesian dari sebuah lingkaran C_m dengan m simpul dan sebuah lintasan P_n dengan n simpul, dengan $m, n \in N$ dan $C_m \times P_n \cong D_{m,n}$.

Hasil kali produk kartesian antara graf G_1 dan graf G_2 adalah graf yang dinotasikan dengan $G \cong G_1 \times G_2$, menghasilkan sebuah graf baru G yang mempunyai himpunan simpul $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan dua simpul (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $\{u_2, v_2\} \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $\{u_1, v_1\} \in E(G_1)$. Definisi hasil kali produk kartesian menyatakan bahwa $G_1 \times G_2$ dan $G_2 \times G_1$ adalah graf isomorfik. Gambar 4.1 mengilustrasikan graf hasil kali produk kartesian $C_6 \times P_2$.



Gambar 4.1: Graf Prisma $C_6 \times P_2 \cong D_{6,2}$

Graf prisma $D_{m,n}$ untuk sebarang m, n dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$ dapat dilihat pada Gambar 4.2. Graf prisma dapat dibentuk dengan menghubungkan simpul-simpul graf lingkaran C_m dengan graf lintasan P_n. Graf prisma merupakan graf dengan $V(D_{m,n}) = \{x_{i,j} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(D_{m,n}) = \{x_{i,j}x_{i,j+1} | 1 \leq i \leq m-1; 1 \leq j \leq n\} \cup x_{i,j}x_{i+1,j} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-1\} \cup x_{m,j}x_{1,j} | 1 \leq j \leq n\}$, serta $p = |V| = mn$ dan $q = |E| = m(2n-1)$.



Gambar 4.2: Graf Prisma $C_m \times P_n \cong D_{m,n}$

Pada simpul $x_{1,1}$ berada di simpul dalam graf lingkaran C_m yang berderajat 3 dan diambil dari simpul yang berada di sebelah kanan atas. Untuk simpul $x_{i,j}$ artinya, i adalah indeks dari simpul di graf lingkaran C_m, dan j adalah indeks dari simpul di graf lintasan P_n. Misalnya, simpul $x_{3,2}$ artinya simpul ke-3 yang terdapat di graf lingkaran C_m dan simpul ke-2 yang terdapat di graf lintasan P_n.

Dalam subbab ini dijelaskan bilangan dominasi jarak dua pada graf prisma $D_{m,n}$ untuk sebarang nilai m, n dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$ yang dinotasikan $\gamma_2(D_{m,n})$.

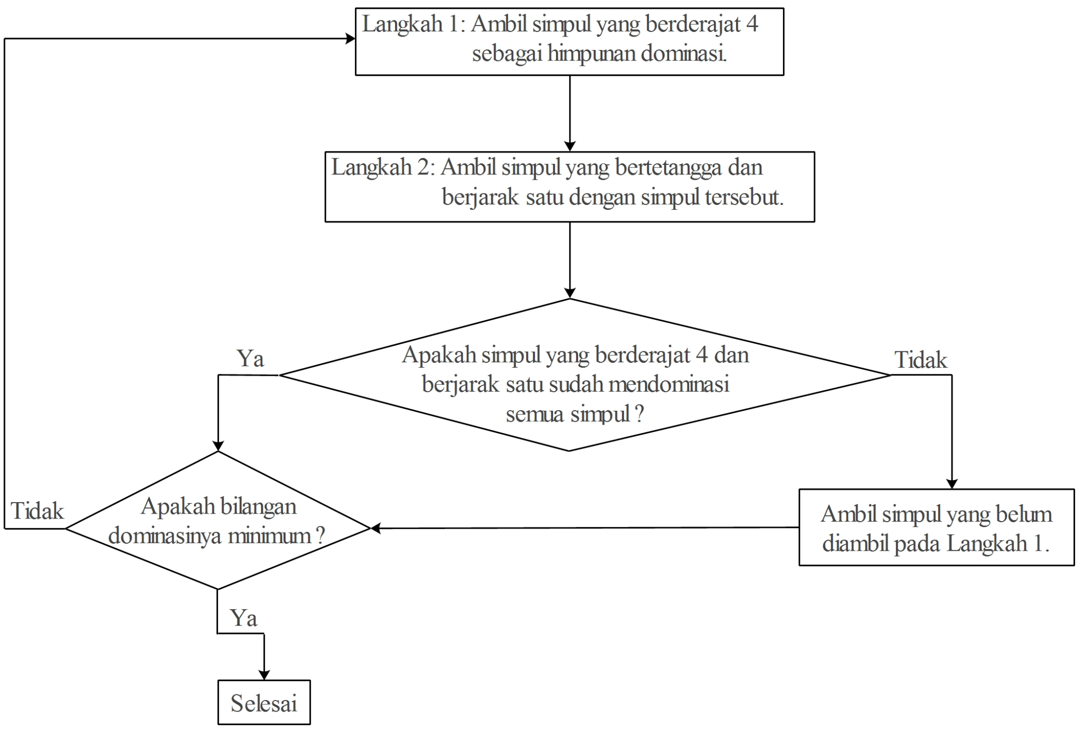
Pada Gambar 4.3 langkah-langkah untuk menentukan bilangan dominasi berjarak dua.

1. Ambil simpul yang berderajat 4 sebagai himpunan dominasinya.
2. Ambil simpul yang bertetangga dengan simpul tersebut dan berjarak dua.
3. Apabila simpul yang berderajat 4 dan berjarak dua sudah mendominasi beberapa simpul dan tidak ada simpul yang berderajat 4 yang akan diambil, maka menentukan bilangan dominasinya.
4. Jika bilangan dominasinya sudah minimum, maka proses menentukan bilangan dominasi sudah selesai.

5. Jika bilangan dominasinya tidak minimum, maka ulangi Langkah pertama dan Langkah kedua.

6. Apabila simpul yang berderajat 4 dan berjarak dua belum mendominasi beberapa simpul dan tidak ada simpul yang berderajat 4 yang akan diambil, maka ambil simpul yang belum didominasi pada Langkah pertama.

7. Ulangi Langkah keempat dan Langkah kelima.



Gambar 4.3: Langkah-langkah untuk menentukan bilangan dominasi berjarak dua.

Teorema 4.1. *Diberikan graf prisma jarak dua $D_{m,n}$ yang diperoleh dari $C_m \times P_n$ untuk $n \geq 2$. Bilangan dominasi jarak dua graf prisma $D_{m,n}$ adalah*

$$\gamma_2(C_m \times P_n)) = \begin{cases} \lceil \frac{mn}{8} \rceil & \textit{jika } m \geq 3; n = 2 \\ \lceil \frac{m(n+1)}{12} \rceil & \textit{jika } m \geq 3; n \equiv 0 \textit{ (mod 3)} \\ \lfloor \frac{m(n+1)+12}{12} \rfloor & \textit{jika } m \geq 3; n \equiv 1 \textit{ (mod 3)} \\ & \textit{atau } m \equiv 0 \textit{ (mod 3)}; n \equiv 2 \textit{ (mod 3)} \\ & \textit{atau } m \equiv 2 \textit{ (mod 3)}; n \equiv 2 \textit{ (mod 3)} \\ \lceil \frac{m(n+1)+12}{12} \rceil & \textit{jika } m \equiv 1 \textit{ (mod 3)}; n \equiv 2 \textit{ (mod 3)} \end{cases}$$

Bukti: Jumlah simpul pada graf $C_m \times P_n$ adalah mn. Misalkan C_m^n adalah graf lingkaran C_m ke-n dan P_n^m adalah graf lintasan P_n ke-m. Himpunan dominasi jarak dua graf $C_m \times P_n$ berupa simpul-simpul di $V(C_m^n) \cap V(P_n^m)$. Jika elemen himpunan dominasi A_2 merupakan elemen himpunan simpul $V(C_m^n) \cap V(P_n^m)$.

1. $m \equiv 0$ (mod 3)
   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(C_m^n) \cap V(P_n^m)$, karena graf lingkaran C_m^n merupakan graf yang berderajat 4 dan setiap simpul graf lingkaran C_m^n di graf $C_m \times P_n$ terhubung dengan simpul-simpul pada graf lintasan P_n^m, maka untuk setiap $x_{3i-2,3j+1} \in A_2$ $V(C_m^n) \cap V(P_n^m)$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dapat mendominasi maksimum 9 simpul, yaitu dua kali 4 simpul tetangga dan dirinya sendiri. Untuk setiap simpul $x_{3i-2,3j+1} \in A_2$ di $n \equiv 0$ (mod 3) dapat mendominasi maksimum 9 simpul, yaitu simpul $x_{3i-2,3j+1}; x_{3i-2,3j+2}; x_{3i-2,3j+3}; x_{3i-1,3j}; x_{3i-1,3j+1}; x_{3i-1,3j+2}; x_{3i,3j}; x_{3i,3j+1}$ dan $x_{3i,3j+2}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, simpul $x_{3i-2,1} \in A_2$ dapat mendominasi 7 simpul, antara lain simpul $x_{3i-2,1}; x_{3i-2,2}; x_{3i-2,3}; x_{3i-1,1}; x_{3i-1,2}; x_{3i,1}$ dan $x_{3i,2}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$. Terdapat juga simpul $x_{5i-1,3} \in A_2$ yang dapat mendominasi 5 simpul, yaitu simpul $x_{5i-3,3}; x_{5i-2,3}; x_{5i-1,3}; x_{5i,3}$ dan $x_{5i+1,3}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$. Untuk simpul $x_{5i-3,3j} \in A_2$ di $n \equiv 0$ (mod 3) dapat mendominasi 2 simpul, antara lain simpul $x_{5i-3,3j}$ dan $x_{5i-2,3j}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

   Pada $n \equiv 1$ (mod 3), simpul $x_{3i-2,3j+1} \in A_2$ dapat mendominasi maksimum 5 simpul, yaitu simpul $x_{3i-2,3j+1}; x_{3i-1,3j}; x_{3i-1,3j+1}; x_{3i,3j}$ dan $x_{3i,3j+1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, untuk simpul $x_{3i-2,1} \in A_2$ dapat mendominasi maksimum 7 simpul, antara lain simpul $x_{3i-2,1}; x_{3i-2,2}; x_{3i-2,3}; x_{3i-1,1}; x_{3i-1,2}; x_{3i,1}$ dan $x_{3i,2}$ untuk $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Pada $n \equiv 2 \pmod 3$ terdapat simpul $x_{3i-2,3j+1} \in A_2$ yang dapat mendominasi maksimum 8 simpul, antara lain simpul $x_{3i-2,3j+1}; x_{3i-2,3j+2}; x_{3i-1,3j}; x_{3i-1,3j+1}; x_{3i-1,3j+2}; x_{3i,3j}; x_{3i,3j+1}$ dan $x_{3i,3j+2}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk simpul $x_{3i-2,1} \in A_2$ pada $n \equiv 2 \pmod 3$ dapat mendominasi 6 simpul, yaitu simpul $x_{3i-2,1}; x_{3i-2,2}; x_{3i-1,1}; x_{3i-1,2}; x_{3i,1}$ dan $x_{3i,2}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$.

Jika $\gamma_2(C_m \times P_n) \leq \lceil \frac{m(n+1)}{12} \rceil$ adalah bilangan dominasi jarak dua yang minimum untuk $m \geq 3$ dan $n \equiv 0 \pmod 3$, maka andaikan $\gamma_2(C_m \times P_n) \leq \frac{m(n+1)}{12} - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 12 simpul, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{m(n+1)}{12} - 1)12 = m(n+1) - 12 < m(n+1).$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $C_m \times P_n$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(C_m \times P_n) \nleq \frac{m(n+1)}{12} - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\frac{m(n+1)}{12} - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(C_m \times P_n) \leq \frac{m(n+1)}{12}$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $C_m \times P_n$.

2. $m \equiv 1 \pmod 3$
   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(C_m^n) \cap V(P_n^m)$, karena graf lingkaran C_m^n merupakan graf yang berderajat 4 dan setiap simpul graf lingkaran C_m^n di graf $C_m \times P_n$ terhubung dengan simpul-simpul pada graf lintasan P_n^m, maka untuk setiap $x_{1,3j+1}; x_{3i+2,3j+1} \in A_2$ $V(C_m^n) \cap V(P_n^m)$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dapat mendominasi maksimum 9 simpul, yaitu dua kali 4 simpul tetangga dan dirinya sendiri. Setiap simpul $x_{1,3j+1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{1,3j+1}; x_{1,3j+2}; x_{1,3j+3}; x_{2,3j}; x_{2,3j+1}; x_{2,3j+2}; x_{3i+1,3j}; x_{3i+1,3j+1}$ dan simpul $x_{3i+1,3j+2}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, setiap simpul $x_{3i+2,3j+1} \in A_2$ di $n \equiv 0 \pmod 3$ dapat mendominasi maksimum 9 simpul, yaitu simpul $x_{3i+2,3j+1}; x_{3i+2,3j+2}; x_{3i+2,3j+3}; x_{3i+1,3j}; x_{3i+1,3j+1}; x_{3i+1,3j+2}; x_{3i+3,3j}; x_{3i+3,3j+1}$ dan $x_{3i+3,3j+2}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Terdapat simpul $x_{3i+2,1}; x_{1,1} \in A_2$

dapat mendominasi 7 simpul. Untuk setiap simpul $x_{3i+2,1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{3i+2,1}; x_{3i+2,2}; x_{3i+2,3}; x_{3i+1,1};$ $x_{3i+1,2}; x_{3i+3,1}$ dan $x_{3i+3,2}$ dengan $i \in \{1,2,3,...,m\}$. Sedangkan, untuk simpul $x_{1,1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{1,1}; x_{1,2}; x_{1,3}; x_{2,1}; x_{2,2}; x_{3i+1,1}$ dan $x_{3i+1,2}$ dengan $i \in \{1,2,3,...,n\}$. Terdapat simpul $x_{3,5j+3} \in A_2$ yang dapat mendominasi 6 simpul, yaitu simpul $x_{3,5j+1}; x_{3,5j+2}; x_{3,5j+3}; x_{3,5j+4}; x_{2,5j+4}$ dan $x_{5,5j+4}$ dengan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Terdapat juga simpul $x_{3,3} \in A_2$ yang dapat mendominasi 5 simpul, yaitu simpul $x_{3,1}; x_{3,2}; x_{3,3}; x_{3,4}$ dan $x_{3,5}$. Untuk simpul $x_{3,3i+3} \in A_2$ di $n \equiv 0 \pmod 3$ dapat mendominasi 3 simpul, antara lain simpul $x_{2,3j+3}; x_{3,3j+3}$ dan $x_{4,3j+3}$ dengan $j \in \{1,2,3,...,n\}$.

Pada simpul $x_{1,3j+1}; x_{3i+2,3j+1} \in A_2$ untuk $n \equiv 2 \pmod 3$ dapat mendominasi maksimum 8 simpul. Simpul $x_{1,3j+1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{1,3i+1}; x_{1,3j+2}; x_{2,3j}; x_{2,3j+1}; x_{2,3j+2}; x_{3i+1,3j}; x_{3i+1,3j+1}$ dan $x_{3i+1,3j+2}$ untuk $i \in \{1,2,3,...,m\}$ dan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Sedangkan, untuk simpul $x_{3i+2,3j+1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{3i+2,3j+1}; x_{3i+2,3j+2}; x_{3i+1,3j}; x_{3i+1,3j+1}; x_{3i+1,3j+2}; x_{3i+3,3j}; x_{3i+3,3j+1}$ dan $x_{3i+3,3j+2}$ dengan $i \in \{1,2,3,...,m\}$ dan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Untuk simpul $x_{1,1}; x_{3i+2,1} \in A_2$ pada $n \equiv 2 \pmod 3$ dapat mendominasi 6 simpul. Simpul $x_{1,1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{1,1}; x_{1,2}; x_{2,1}; x_{2,2}x_{3i+1,1}$ dan $x_{3i+1,2}$ untuk $i \in \{1,2,3,...,m\}$. Sedangkan, simpul $x_{3i+2,1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{3i+2,1}; x_{3i+2,2}; x_{3i+1,1}; x_{3i+1,2}; x_{3i+3,1}$ dan $x_{3i+3,2}$ dengan $i \in \{1,2,3,...,n\}$. Terdapat simpul $x_{3,5j-2} \in A_2$ yang dapat mendominasi 5 simpul, antara lain $x_{3,5j}; x_{3,5j-1}; x_{3,5j-2}; x_{3,5j-3}$ dan $x_{3,5j-4}$ dengan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Terdapat juga simpul $x_{3,5j+3} \in A_2$ yang mendominasi 3 simpul, yaitu simpul $x_{3,5j+1}; x_{3,5j+2}$ dan $x_{3,5j+3}$dengan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Sedangkan, untuk simpul $x_{3,2} \in A_2$ di $n = 2$ yang mendominasi 2 simpul, yaitu simpul $x_{3,1}$ dan simpul $x_{3,2}$.

Pada $n \equiv 1 \pmod 3$, simpul $x_{1,1}; x_{3i+2,1} \in A_2$ dapat mendominasi maksimum 7 simpul. Simpul $x_{1,1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{1,1}; x_{1,2}; x_{1,3}; x_{2,1}; x_{3i+1,1}$ dan $x_{3i+1,2}$. Sedangkan, simpul $x_{3i+2,1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{3i+1,1}; x_{3i+1,2}; x_{3i+2,1}; x_{3i+2,2}; x_{3i+2,3}; x_{3i+3,1}$ dan $x_{3i+3,2}$ dengan $i \in \{1,2,3,...,m\}$. Simpul $x_{1,3j+1}; x_{3i+2,3j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 5 simpul. Simpul $x_{1,3j+1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{1,3j+1}; x_{2,3j}; x_{2,3j+1}; x_{3i+1,3j}$ dan $x_{3i+1,3j}$ dengan $i \in \{1,2,3,...,m\}$ dan

$j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, untuk simpul $x_{3i+2,3j+1} \in A_2$ yang dapat mendominasi simpul $x_{3i+1,3j}; x_{3i+1,3j+1}; x_{3i+2,3j+1}; x_{3i+3,3j}$ dan $x_{3i+3,3j+1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Terdapat simpul $x_{3,5j-2} \in A_2$ dapat mendominasi 4 simpul, antara lain simpul $x_{3,5j-1}; x_{3,5j-2}; x_{3,5j-3}$ dan $x_{3,5j-4}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Terdapat juga simpul $x_{3,3j+3} \in A_2$ dapat mendominasi 2 simpul, yaitu simpul $x_{3,3j+3}$ dan simpul $x_{3,3j+4}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

3. $m \equiv 2$ (mod 3)

   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(C_m^n) \cap V(P_n^m)$, karena graf lingkaran C_m^n merupakan graf yang berderajat 4 dan setiap simpul graf lingkaran C_m^n di graf $C_m \times P_n$ terhubung dengan simpul-simpul pada graf lintasan P_n^m, maka untuk setiap $x_{1,3j+1}; x_{3i+3,3j+1} \in A_2$ $V(C_m^n) \cap V(P_n^m)$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dapat mendominasi maksimum 9 simpul, yaitu dua kali 4 simpul tetangga dan dirinya sendiri. Setiap simpul $x_{1,3j+1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{1,3j+1}; x_{1,3j+2}; x_{1,3j+3}; x_{2,3j}; x_{2,3j+1}; x_{2,3j+2}; x_{3i+1,3j}; x_{3i+1,3j+1}$ dan $x_{3i+1,3j+2}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, untuk setiap simpul $x_{3i+3,3j+1} \in A_2$ di $n \equiv 0$ (mod 3) dapat mendominasi maksimum 9 simpul, yaitu simpul $x_{3i+2,3j}; x_{3i+2,3j+1}; x_{3i+2,3j+2}; x_{3i+3,3j+1}; x_{3i+3,3j+2}; x_{3i+3,3j+3}; x_{3i+4,3j}; x_{3i+4,3j+1}$ dan $x_{3i+4,3j+2}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $x_{1,1}; x_{3i-2,1} \in A_2$ dapat mendominasi 7 simpul. Simpul $x_{1,1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{1,1}; x_{1,2}; x_{1,3}; x_{2,1}; x_{2,2}; x_{3i+2,1}$ dan $x_{3i+2,2}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$. Sedangkan, untuk setiap $x_{3i-2,1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{3i+2,1}$; $x_{3i+2,2}; x_{3i+3,1}; x_{3i+3,2}; x_{3i+3,3}; x_{3i+4,1}$ dan $x_{3i+4,2}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$. Terdapat juga simpul $x_{3,5j+3}; x_{4,5j+3} \in A_2$ yang dapat mendominasi 5 simpul. Setiap simpul $x_{3,5j+3} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{2,5j+4}; x_{3,5j+1}; x_{3,5j+2}; x_{3,5j+3}$ dan $x_{3,5j+4}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, untuk setiap simpul $x_{4,5j+3} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{4,5j+1}; x_{4,5j+2}; x_{4,5j+3}; x_{4,5j+4}$ dan $x_{5,5j+4}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $x_{3,3j}; x_{3,3j+3} \in A_2$ dapat mendominasi 4 simpul. Pada simpul $x_{3,3j} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{2,3j}; x_{3,3j}; x_{4,3j}$ dan $x_{5,3j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, simpul $x_{3,3j+3} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{2,3j+3}; x_{3,3j+3}; x_{4,3j+3}$ dan $x_{5,3j+3}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk simpul $x_{3i+4,3j} \in A_2$ di $n \equiv 0$ (mod 3) dapat mendominasi 2 simpul, antara lain simpul $x_{3i+4,3j}$ dan $x_{3i+5,3j}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan

$j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Pada $n \equiv 1 \pmod 3$, simpul $x_{1,1}; x_{3i-2,1} \in A_2$ dapat mendominasi maksimum 7 simpul. Setiap simpul $x_{1,1}; x_{3i-2,1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{1,1}; x_{1,2}; x_{1,3}; x_{2,1}; x_{2,2}; x_{3i+2,1}$ dan simpul $x_{3i+2,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$. Sedangkan, untuk setiap simpul $x_{3i-2,1} \in A_2$ yang dapat mendominasi simpul $x_{3i+2,1}; x_{3i+2,2}; x_{3i+3,1}; x_{3i+3,2}; x_{3i+3,3}; x_{3i+4,1}$ dan $x_{3i+4,2}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$.

Terdapat simpul $x_{1,3j+1}; x_{3i+3,3j+1} \in A_2$ pada $n \equiv 1 \pmod 3$ yang dapat mendominasi maksimum 5 simpul. Setiap $x_{1,3j+1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{1,3j+1}; x_{2,3j}; x_{2,3j+1}; x_{3i+2,3j}$ dan simpul $x_{3i+2,3j+1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, untuk setiap simpul $x_{3i+3,3j+1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{3i+2,3j}; x_{3i+2,3j+1}; x_{3i+3,3j+1}; x_{3i+4,3j}$ dan simpul $x_{3i+4,3j+1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Terdapat juga simpul $x_{3,5j-2}; x_{4,5j-2}; x_{3,5j-2} \in A_2$ pada $n \equiv 1 \pmod 3$ yang dapat mendominasi maksimum 4 simpul. Setiap simpul $x_{3,5j-2} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{3,5j-4}; x_{3,5j-3}; x_{3,5j-2}$ dan simpul $x_{3,5j-1}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk setiap simpul $x_{4,5j-2} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{4,5j-4}; x_{4,5j-3}; x_{4,5j-2}$ dan simpul $x_{4,5j-1}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, untuk setiap simpul $x_{3,5j+2} \in A_2$ dapat mendominasi simpul dapat mendominasi simpul $x_{3,5j+4}; x_{3,5j+3}; x_{3,5j+2}$ dan simpul $x_{3,5j+1}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Pada simpul $x_{1,3j+1}; x_{3i+3,3j+1} \in A_2$ untuk $n \equiv 2 \pmod 3$ dapat mendominasi maksimum 8 simpul. Setiap simpul $x_{1,3j+1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{1,3j+1}; x_{1,3j+2}; x_{2,3j}; x_{2,3j+1}; x_{2,3j+2}; x_{3i+2,3j}; x_{3i+2,3j+1}$ dan simpul $x_{3i+2,3j+2}$ untuk $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, setiap simpul $x_{3i+3,3j+1} \in A_2$ pada $n \equiv 2 \pmod 3$ dapat mendominasi simpul $x_{3i+2,3j}; x_{3i+2,3j+1}; x_{3i+2,3j+2}; x_{3i+3,3j+1}; x_{3i+3,3j+2}; x_{3i+4,3j}$ dan simpul $x_{3i+4,3j+2}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk setiap simpul $x_{1,1}; x_{3i+3,1} \in A_2$ dapat mendominasi maksimum 6 simpul. Setiap simpul $x_{1,1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{1,1}; x_{1,2}; x_{2,1}; x_{2,2}; x_{3i+2,1}$ dan simpul $x_{3i+2,2}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$. Sedangkan, setiap simpul $x_{3i+3,1} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{3i+2,1}; x_{3i+2,2}; x_{3i+3,1}; x_{3i+3,2}; x_{3i+4,1}$ dan simpul $x_{3i+4,2}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$. Terdapat simpul $x_{3,5j-2}; x_{4,5j-2} \in A_2$

yang dapat mendominasi 5 simpul. Untuk setiap simpul $x_{3,5j-2} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{3,5j}; x_{3,5j-1}; x_{3,5j-2}; x_{3,5j-3}$ dan simpul $x_{3,5j-4}$ dengan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Sedangkan, untuk setiap simpul $x_{4,5j-2} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{4,5j}; x_{4,5j-1}; x_{4,5j-2}; x_{4,5j-3}$ dan simpul $x_{4,5j-4}$ dengan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Terdapat juga simpul $x_{3,5j+3}; x_{4,5j+3} \in A_2$ yang dapat mendominasi 3 simpul. Untuk setiap simpul $x_{3,5j+3} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{3,5j+1}; x_{3,5j+2}$ dan simpul $x_{3,5j+3}$ dengan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Sedangkan, untuk setiap simpul $x_{4,5j+3} \in A_2$ dapat mendominasi simpul $x_{4,5j+1}; x_{4,5j+2}$ dan simpul $x_{4,5j+3}$ dengan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Pada $n = 2$ terdapat simpul $x_{3,2} \in A_2$ yang dapat mendominasi 4 simpul, antara lain simpul $x_{3,1}; x_{3,2}; x_{4,1}$ dan simpul $x_{4,2}$.

Jika $\gamma_2(C_m \times P_n) \leq \lceil \frac{m(n+2)+12}{12} \rceil$ adalah bilangan dominasi jarak dua yang minimum untuk $m \equiv 1 \pmod 3$, $m \equiv 2 \pmod 3$, dan $n \equiv 2 \pmod 3$, maka andaikan $\gamma_2(C_m \times P_n) \leq \frac{m(n+2)+12}{12} - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 12 simpul, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{m(n+2)+12}{12} - 1\right)9 = \frac{3m(n+2)}{4} < \frac{3m(n+2)+36}{4}.$$

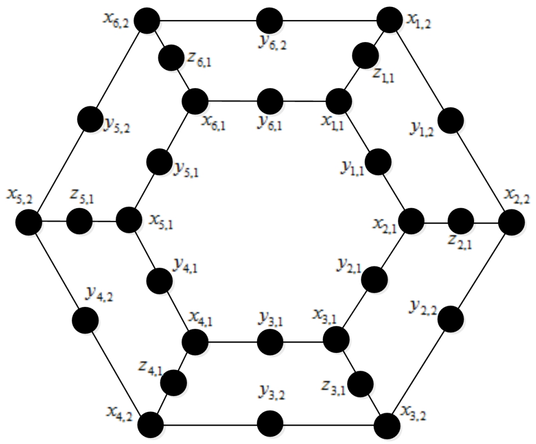
Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $C_m \times P_n$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(C_m \times P_n) \nleq \frac{m(n+2)+12}{12} - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\frac{m(n+2)+12}{12} - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(C_m \times P_n) \leq \frac{m(n+2)+12}{12}$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $C_m \times P_n$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa himpunan dominasi jarak dua untuk graf $D_{m,n}$ atau graf $C_m \times P_n$ adalah $A_2 = \{x_{3i-2,1}; x_{3i-2,3j+1} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{5i-3,3j}; x_{5i-1,3} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,1}; x_{1,3j+1}; x_{3,3j+3}; x_{3,5j+3}; x_{3,5j-2}; x_{3,2} | 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{3i+2,1}; x_{3i+2,3j+1} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{3i+3,1}; x_{3i+3,3j+1} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{3,3j}; x_{4,5j+3}; x_{3i+4,3j} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{3,5j+2}; x_{4,5j-2} | 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{3,3}\}$.

4.2 Bilangan Dominasi Jarak Satu dan Dua dari Graf Prisma dan Subdivisi Homogennya

4.2.1 Bilangan Dominasi Jarak Satu dari Subdivisi Homogen Graf Prisma

Subbab ini menjelaskan bilangan dominasi jarak satu pada subdivisi graf prisma. Graf subdivisi dari graf G dinotasikan dengan $S(G)$ adalah suatu graf baru yang ditambahkan dengan satu atau lebih simpul berderajat dua pada satu atau lebih sisi di G. Sedangkan, subdivisi homogen dari graf G yang dinotasikan $S_H(G)$ adalah suatu graf baru yang diperoleh dengan menambahkan simpul di setiap sisi-sisi pada graf G. Untuk subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{m,n})$ pada penelitian ini adalah suatu graf baru yang diperoleh dengan menambahkan simpul di setiap sisi-sisi pada graf prisma. Selanjutnya, perhatikan Gambar 4.4 berikut yang merupakan ilustrasi dari subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{6,2})$.

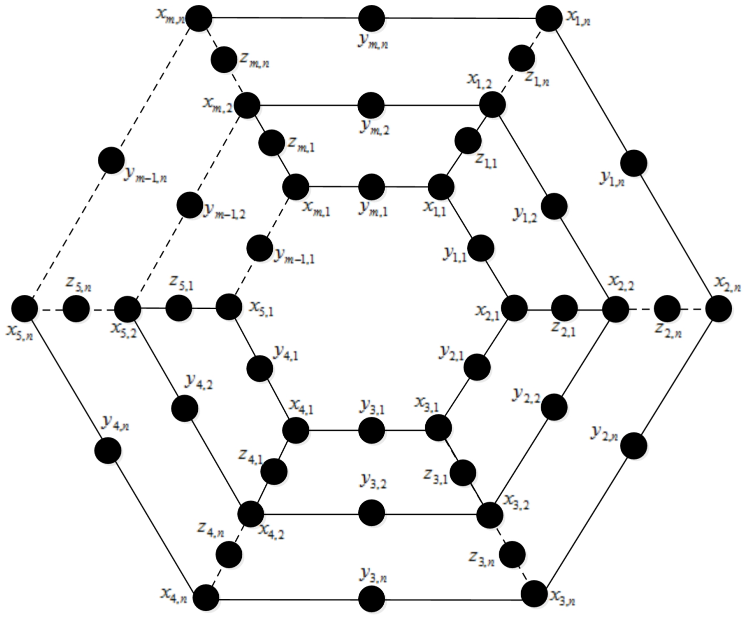


Gambar 4.4: Subdivisi Homogen Graf Prisma $S_H(D_{6,2})$

Simpul $x_{i,j}$ merupakan simpul bagian dalam, tengah, dan luar di graf lingkaran C_m yang berderajat 3. Jika simpul $x_{i,j}$ berada di persimpangan, maka simpul $x_{i,j}$ berderajat 4. Untuk simpul $y_{i,j}$, merupakan simpul subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_m)$ yang berderajat 2. Sedangkan, simpul $z_{i,j}$ merupakan simpul subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n)$. Pada simpul $x_{1,1}$ berada di simpul dalamnya graf lingkaran C_m yang berderajat 3 dan diambil dari simpul yang berada di sebelah kanan atas.

Subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{m,n})$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ adalah graf dengan $V(S_H(D_{m,n})) = \{x_{i,j}|1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,j}|1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{z_{i,j}|1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(S_H(D_{m,n}) = \{x_{i,j}x_{i,j+l}|1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+k}|1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-1; 1 \leq k \leq m-1\}$ $\cup$ $\{x_{i,j}y_{i,j}|1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}z_{i,j}|1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup$

$\{z_{i,j}x_{i+k,j}|1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m-1\} \cup \{x_{i,j+k}y_{i,j+k}|1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-1; 1 \leq k \leq m-1\}$, serta $p = |V| = m(3n-1)$ dan $q = |E| = 2m(2n-1)$. Perhatikan Gambar 4.5 berikut.



Gambar 4.5: Subdivisi Homogen Graf Prisma $S_H(D_{m,n})$

Untuk simpul $x_{i,j}$ artinya, i adalah indeks dari simpul di graf lingkaran C_m, dan j adalah indeks dari simpul di graf lintasan P_n. Misalnya, simpul $x_{2,3}$ artinya simpul ke-2 yang terdapat di graf lingkaran C_m dan simpul ke-3 yang terdapat di graf lingkaran P_n.

Selanjutnya, akan dibahas tentang batas atas dan batas bawah untuk sebarang graf terhubung G. Teorema berikut memberikan batas atas dan batas bawah untuk bilangan dominasi sebarang graf terhubung.

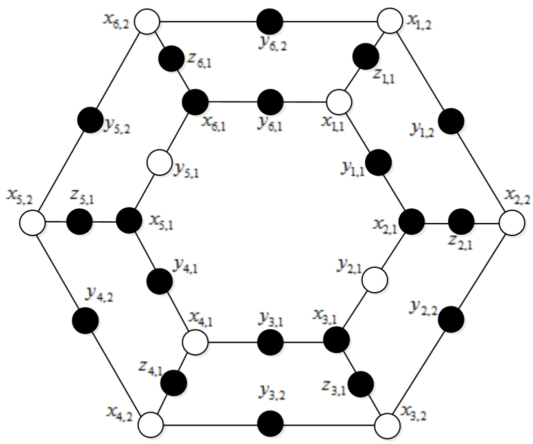
Teorema 4.2. *Diberikan sebarang graf terhubung G, batas atas dan batas bawah bilangan dominasi graf G adalah*

$$\lceil \frac{p}{1+\triangle(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \triangle(G)$$

Bukti: Misalkan A adalah sebuah himpunan dominasi γ-*set* dari G. Pertama, kita andaikan batas atas dari himpunan dominasi γ-*set* graf G adalah $\lceil \frac{p}{1+\triangle(G)} \rceil$. Untuk setiap simpul di graf G dapat menjadi elemen himpunan dominasi dan $\triangle(G)$ derajat maksimum graf G dengan p banyaknya simpul di G. Untuk setiap simpul elemen A mendominasi simpul yang bertetangga. Sebuah simpul dapat mendominasi sebanyak derajat simpul tersebut di suatu graf G ditambah dengan dirinya sendiri.

Sehingga satu simpul berderajat maksimum dapat mendominasi sebanyak $\Delta(G)+1$. Maka bilangan dominasi yang memenuhi adalah hasil bagi jumlah simpul di graf G dengan jumlah derajat maksimum dan satu simpul minimum yang dapat mendominasi. Akibatnya, $\gamma(G) \geq \lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil$ dengan $p = |V|$. Untuk batas bawahnya, misalkan v adalah simpul dengan derajat maksimum $\triangle(G)$, maka v sebagai elemen himpunan dominasi γ-*set* dan simpul di $V(G) - \gamma$-*set* merupakan himpunan dominasi mereka sendiri. Akibatnya, $V(G) - \gamma$-*set* merupakan elemen himpunan dominasi dengan kardinalitas $|A| = |\gamma$-*set*$| = |V| - \triangle(G)$, sehingga $\gamma(G) \leq |V| - \triangle(G)$.

Selanjutnya, dibahas bilangan dominasi jarak satu pada subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{m,n})$ untuk $m \geq 3$, $n \geq 2$. Gambar 4.6 berikut merupakan ilustrasi subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{6,2})$ dengan simpul-simpul elemen himpunan dominasi jarak satu dan bilangan dominasinya adalah 10.



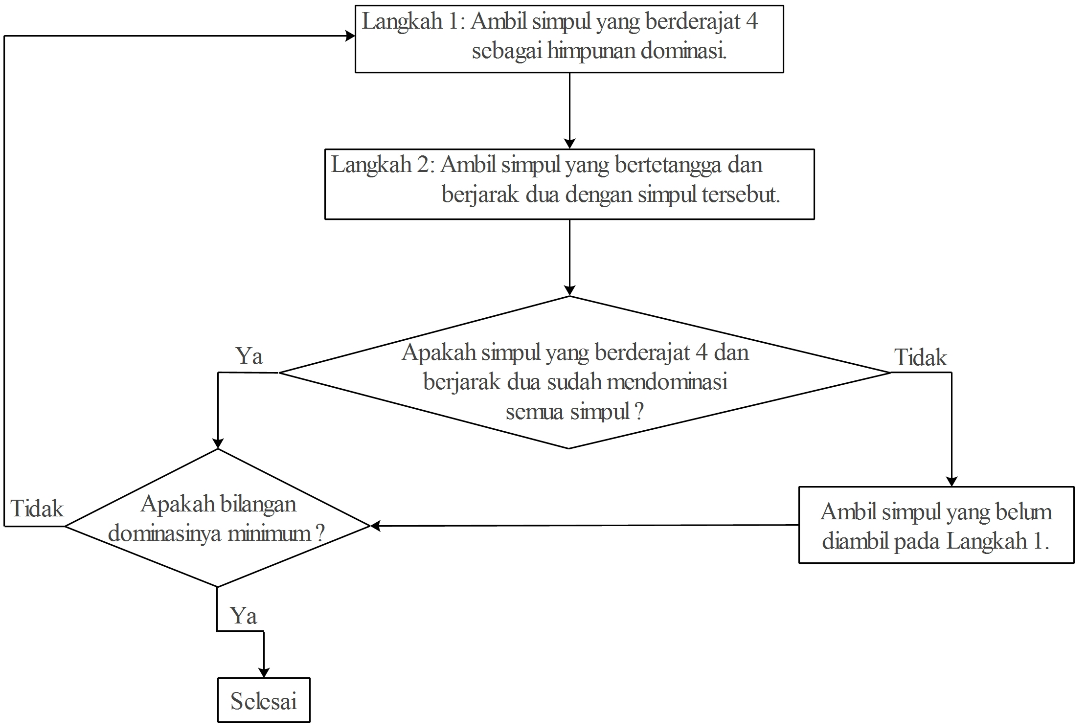
Gambar 4.6: Subdivisi Homogen Graf Prisma $S_H(D_{6,2})$ dengan Simpul-simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Satu

Pada Gambar 4.7 merupakan langkah-langkah untuk menentukan bilangan dominasi berjarak satu.

1. Ambil simpul yang berderajat 4 sebagai himpunan dominasinya.

2. Ambil simpul yang bertetangga dengan simpul tersebut dan berjarak satu.

3. Apabila simpul yang berderajat 4 dan berjarak satu sudah mendominasi beberapa simpul dan tidak ada simpul yang berderajat 4 yang akan diambil, maka menentukan bilangan dominasinya.



Gambar 4.7: Langkah-langkah untuk menentukan bilangan dominasi berjarak satu.

4. Jika bilangan dominasinya sudah minimum, maka proses menentukan bilangan dominasi sudah selesai.

5. Jika bilangan dominasinya tidak minimum, maka ulangi Langkah ke-1 dan ke-2.

6. Apabila simpul yang berderajat 4 dan berjarak satu belum mendominasi beberapa simpul dan tidak ada simpul yang berderajat 4 yang akan diambil, maka ambil simpul yang belum didominasi pada Langkah ke-1.

7. Ulangi Langkah ke-4 dan Langkah ke-5.

Teorema 4.3. *Diberikan subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{m,n})$ yang diperoleh dari $S_H(C_m \times P_n)$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Bilangan dominasi jarak satu subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{m,n})$ adalah*

$$\gamma(S_H(C_m \times P_n)) = \begin{cases} \lfloor \frac{3(m-1)}{2} \rfloor + n & \textit{jika } m \geq 3\textit{; } n = 2 \\ \frac{m(7n-3)+9n}{9} & \textit{jika } m \equiv 0 \textit{ (mod 3); } n \equiv 0 \textit{ (mod 3)} \\ \lceil \frac{m(7n-1)+3(n+1)}{9} \rceil & \textit{jika } m \equiv 0 \textit{ (mod 3); } n \equiv 1 \textit{ (mod 3)} \\ & \textit{atau } m \equiv 2 \textit{ (mod 3); } n \equiv 1 \textit{ (mod 3)} \\ \frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9} & \textit{jika } m \equiv 0 \textit{ (mod 3); } n \equiv 2 \textit{ (mod 3)} \\ \frac{m(7n-3)+9(n-1)}{9} & \textit{jika } m \equiv 1 \textit{ (mod 3); } n \equiv 0 \textit{ (mod 3);} \\ & \textit{atau } m \equiv 2 \textit{ (mod 3); } n \equiv 0 \textit{ (mod 3);} \\ \lfloor \frac{m(7n-1)+3(n+1)}{9} \rfloor & \textit{jika } m \equiv 1 \textit{ (mod 3); } n \equiv 1 \textit{ (mod 3)} \\ \lfloor \frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9} \rfloor & \textit{jika } m \equiv 1 \textit{ (mod 3); } n \equiv 2 \textit{ (mod 3)} \\ \lceil \frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9} \rceil & \textit{jika } m \equiv 2 \textit{ (mod 3); } n \equiv 2 \textit{ (mod 3)} \end{cases}$$

Bukti: Jumlah simpul pada graf $C_m \times P_n$ adalah $m(3n-1)$. Misalkan C_m^n adalah graf lingkaran C_m ke-n dan P_n^m adalah graf lintasan P_n ke-m. Himpunan dominasi graf $C_m \times P_n$ berupa simpul-simpul di $V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$, atau berupa simpul-simpul di $S_H(P_n^m)$ tanpa simpul $S_H(C_m^n)$, begitupun sebaliknya. Setiap simpul di graf P_n^m yang melekat pada graf C_m^n dapat dikatakan sebagai simpul-simpul di graf P_n^m ataupun simpul-simpul di graf C_m^n. Untuk menunjukkan banyak simpul minimum yang menjadi elemen dominasi jarak satu graf $S_H(C_m \times P_n)$, akan dibagi menjadi tiga kasus. Kasus pertama, jika elemen himpunan dominasi A merupakan elemen himpunan simpul $V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$, kasus kedua jika elemen himpunan dominasi A diambil dari simpul-simpul di $V(S_H(C_m^n))$, dan kasus ketiga jika elemen himpunan dominasi A diambil dari simpul-simpul di $V(S_H(P_n^m))$.

1. $n \equiv 0$ (mod 3)
   Kasus 1: $A \subseteq V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$
   Ambil simpul di $A \subseteq V(S_H(C_m^n))$, karena subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ merupakan graf yang berderajat 2 dan setiap simpul graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ di graf $S_H(C_m \times P_n)$ terhubung dengan simpul-simpul pada subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n^m)$, maka untuk setiap $x_{2i,2j} \in V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$ untuk $i \in \{1,2,3,...,m\}$ dan $j \in \{1,2,3,...,n\}$

dengan derajat maksimum $deg(x_{2i,2j}) = 4$. Sehingga, setiap simpul $x_{2i,2j} \in A$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ untuk m gasal dapat mendominasi maksimum 5 simpul. Untuk setiap simpul $x_{2i,2j}$ dapat mendominasi maksimum 5 simpul, antara lain $x_{2i,2j}; y_{2i,2j-1}; y_{2i,2j}; z_{2i-1,2j}$ dan $z_{2i,2j}$. Sedangkan, untuk m gasal terdapat simpul $x_{2i,6j-1} \in A$ dapat mendominasi 4 simpul, yaitu simpul $x_{2i,6j-1}; y_{2i,6j-1}; y_{2i,6j-1}$ dan $z_{2i,6j-1}$. Untuk setiap m gasal terdapat simpul $x_{2i-1,3j-1}; x_{2i,2j+1} \in A$ dapat mendominasi 3 simpul. Simpul $x_{2i-1,3j-1} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{2i-1,3j-1}; z_{2i-1,3j-2}$ dan $z_{2i-1,3j-1}$. Sedangkan simpul $x_{2i,2j+1} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{2i,2j+1}; y_{2i,2j+1}$ dan $y_{2i,2j-1}$.

Untuk m genap terdapat simpul $x_{6i-3,3j-1}; x_{6i-2,6j-3} \in A$ dapat mendominasi 4 simpul dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Simpul $x_{6i-3,3j-1} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{6i-3,3j-1}; y_{6i-3,3j-1}; z_{3i-2,6j-5}$ dan $z_{3i-1,6j-5}$. Sedangkan, simpul $x_{6i-2,6j-3} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{6i-2,6j-3}; y_{6i-2,4j-1}; z_{6i-2,6j-4}$ dan $z_{6i-2,6j-3}$. Pada m genap terdapat juga simpul $x_{2i,6j-1}; x_{6i-2,4j}; z_{6i-2,4j-3} \in A$ dapat mendominasi 3 simpul dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Simpul $x_{2i,6j-1} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{2i,6j-1}; y_{2i,6j-1}$ dan $y_{2i-1,6j-1}$. Untuk simpul $x_{6i-2,4j} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{6i-2,4j}; y_{6i-3,4j}$ dan $z_{6i-3,4j}$. Sedangkan, simpul $z_{6i-2,4j-3} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{6i-2,4j-3}; x_{6i-2,4j-2}$ dan $z_{6i-2,4j-3}$.

Untuk $m \equiv 1$ (mod 3) terdapat simpul $x_{3i,1} \in A$ dapat mendominasi 3 simpul, yaitu simpul $x_{3i,1}; y_{3i-1,1}$ dan $y_{3i,1}$.

Kasus 2: $A \subseteq V(S_H(C_m^n))$

Ambil simpul di $A \subseteq V(S_H(C_m^n))$, dengan graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, maka terdapat simpul yang dapat mendominasi 3 simpul, yaitu simpul $y_{3i-2,1} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{3i-2,1}; x_{3i-1,1}$ dan $y_{3i-2,1}$ untuk $m \equiv 2$ (mod 3) dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Jika $\gamma(C_m \times P_n) \leq \frac{m(7n-3)+9(n-1)}{9}$ bilangan dominasi yang minimum untuk $m \equiv 1$ (mod 3) dan $m \equiv 2$ (mod 3), maka andaikan $\gamma(C_m \times P_n) \leq \frac{m(7n-3)+9(n-1)}{9} - 1$. Karena setiap simpul pada A maksimum dapat mendominasi 5 simpul yaitu simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{m(7n-3)+9(n-1)}{9}-1)5=\frac{5m(7n-3)+45(n-2)}{9}<\frac{5m(7n-3)+45(n-1)}{9}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $S_H(C_m \times P_n)$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan $x_{3,1}$, bukan elemen dari A maka simpul $y_{2,1}$ dan $y_{3,1}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \nleq \frac{m(7n-3)+9(n-1)}{9} - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\frac{m(7n-3)+9(n-1)}{9} - 1$. Jadi pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \leq \frac{m(7n-3)+9(n-1)}{9}$ merupakan bilangan dominasi minimum pada $S_H(C_m \times P_n)$.

Kasus 3: $A \subseteq V(S_H(P_n^m))$

Ambil simpul di $A \subseteq V(S_H(P_n^m))$, setiap simpul untuk m gasal pada graf lintasan $S_H(P_n^m)$ merupakan graf yang berderajat 2, maka $z_{2i-1,3j} \in A$ memiliki derajat maksimum 2 dengan $i \in \{1,2,3,...,m\}$ dan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Pada setiap simpul $z_{2i-1,3j}$ dapat mendominasi 3 simpul, diantaranya $x_{2i-1,3j}; x_{2i-1,3j+1}$ dan $z_{2i-1,3j}$.

Jika $\gamma(C_m \times P_n) \leq \frac{m(7n-3)+9n}{9}$ bilangan dominasi yang minimum untuk $m \equiv 0$ (mod 3), maka andaikan $\gamma(C_m \times P_n) \leq \frac{m(7n-3)+9n}{9} - 1$. Karena setiap simpul pada A maksimum dapat mendominasi 5 simpul yaitu simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{m(7n-3)+9n}{9}-1)5=\frac{5m(7n-3)+45(n-1)}{9}<\frac{5m(7n-3)+45n}{9}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $S_H(C_m \times P_n)$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan $x_{1,2}$, bukan elemen dari A maka simpul $z_{1,1}$ dan $z_{1,2}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \nleq \frac{m(7n-3)+9n}{9} - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\frac{m(7n-3)+9n}{9} - 1$. Jadi pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \leq \frac{m(7n-3)+9n}{9}$ merupakan bilangan dominasi minimum pada $S_H(C_m \times P_n)$.

2. $n \equiv 1$ (mod 3)

Kasus 1: $A \subseteq V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$

Ambil simpul di $A \subseteq V(S_H(C_m^n))$, karena subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ merupakan graf yang berderajat 2 dan setiap simpul graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ di graf $S_H(C_m \times P_n)$ terhubung dengan simpul-simpul pada subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n^m)$, maka untuk m gasal terdapat simpul $x_{2i,2j} \in V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$ mempunyai dengan derajat maksimum $deg(x_{2i-1,j}) = 4$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sehingga untuk simpul $x_{2i,2j} \in A$ dapat mendominasi maksimum 5 simpul, antara lain $x_{2i,2j}; y_{2i,2j-1}; y_{2i,2j}; z_{2i-1,2j}$ dan $z_{2i,2j}$. Untuk m gasal terdapat simpul $x_{2i,6j-3}$ dapat mendominasi 4 simpul, yaitu simpul $x_{2i,6j-3}; y_{2i-1,6j-3}; y_{2i,6j-3}$ dan $z_{2i,6j-3}$. Setiap simpul $x_{2i-1,3j}; x_{1,2j} \in A$ dapat mendominasi 3 simpul. Simpul $x_{2i-1,3j} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{2i-1,3j}; z_{2i-1,3j-1}$ dan $z_{2i-1,3j}$. Sedangkan, simpul $x_{1,2j} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{1,2j}; y_{1,2j-1}$ dan $y_{1,2j}$.

Untuk m genap terdapat simpul $x_{2i-1,2j+2} \in A$ dapat mendominasi 3 simpul, antara lain simpul $x_{2i-1,2j+2}; y_{2i-1,2j+1}$ dan $z_{2i-1,2j+2}$. Sedangkan, untuk $m \equiv 1$ (mod 3) terdapat simpul $x_{3i,6j-2}; x_{3i+1,6j-2} \in A$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Simpul $x_{3i,6j-2} \in A$ dapat mendominasi 3 simpul, antara lain simpul $x_{3i,6j-2}; y_{3i-1,6j-2}$ dan $y_{3i,6j-2}$. Sedangkan, simpul $x_{3i+1,6j-2} \in A$ dapat mendominasi dirinya sendiri.

Kasus 2: $A \subseteq V(S_H(C_m^n))$

Ambil simpul di $A \subseteq V(S_H(C_m^n))$, dengan graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, maka terdapat simpul yang dapat mendominasi 3 simpul, yaitu simpul $y_{3i-2,6j-2} \in A$ untuk m bernilai gasal dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $y_{3i-2,6j-2} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{3i-2,6j-2}; x_{3i-1,6j-2}$ dan $y_{3i-2,6j-2}$.

Kasus 3: $A \subseteq V(S_H(P_n^m))$

Ambil simpul di $A \subseteq V(S_H(P_n^m))$, untuk m gasal pada graf lintasan $S_H(P_n^m)$ merupakan graf yang berderajat 2, maka $z_{2i-1,3j-2} \in A$ dapat mendominasi 3 simpul dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pada setiap simpul $z_{2i-1,3j-2} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{2i-1,3j-2}; x_{2i-1,3j-1}$ dan $z_{2i-1,3j-2}$.

Jika $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor\frac{m(7n-1)+3(n+1)}{9}\rfloor$ untuk $m \equiv 0 \pmod 3$ dan $m \equiv 2 \pmod 3$, sedangkan, $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lceil\frac{m(7n-1)+3(n+1)}{9}\rceil$ untuk $m \equiv 1 \pmod 3$ bilangan dominasi yang minimum, maka andaikan $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \leq \frac{m(7n-1)+3(n+1)}{9} - 1$. Karena setiap simpul pada A maksimum dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$\frac{m(7n-1)+3(n+1)}{9} - 1)5 = \frac{5m(7n-1)+15(n-2)}{9} < \frac{5m(7n-1)+15(n+1)}{9}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $S_H(C_m \times P_n)$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan $x_{1,4}$, bukan elemen dari A maka simpul ; $y_{1,3}$ dan $z_{1,4}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \nleq \frac{m(7n-1)+3(n+1)}{9} - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\frac{m(7n-1)+3(n+1)}{9} - 1$. Jadi pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \leq \frac{m(7n-1)+3(n+1)}{9}$ merupakan bilangan dominasi minimum pada $S_H(C_m \times P_n)$.

3. $n \equiv 2 \pmod 3$

   Kasus 1: $A \subseteq V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$

   Ambil simpul di $A \subseteq V(S_H(C_m^n))$, karena subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ merupakan graf yang berderajat 2 dan setiap simpul graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ di graf $S_H(C_m \times P_n)$ terhubung dengan simpul-simpul pada subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n^m)$, maka untuk setiap $x_{2i,2j} \in V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$ pada m gasal dengan $i \in \{1,2,3,...,m\}$ dan $j \in \{1,2,3,...,n\}$ mempunyai derajat maksimum $deg(x_{2i-1,j}) = 4$. Sehingga untuk setiap simpul $x_{2i,2j} \in A$ dapat mendominasi maksimum 5 simpul, antara lain $x_{2i,2j}; y_{2i,2j-1}; z_{2i,2j}$ dan $z_{2i-1,2j}$. Untuk m gasal terdapat simpul $x_{2i-1,3j}; x_{2i,2j-1} \in A$ dapat mendominasi maksimum 3 simpul dengan $i \in \{1,2,3,...,m\}$ dan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Simpul $x_{2i-1,3j} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{2i-1,3j}; z_{2i-1,3j-1}$ dan $z_{2i-1,3j}$. Sedangkan, simpul $x_{2i,2j-1} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{2i,2j-1}; y_{2i-1,2j-1}$ dan $y_{2i,2j-1}$. Tetapi untuk m bernilai genap terdapat simpul $x_{2i-1,2j+2} \in A$ dapat mendominasi 3 simpul dengan $i \in \{1,2,3,...,m\}$ dan $j \in \{1,2,3,...,n\}$, yaitu simpul $x_{2i-1,2j+2}; y_{2i-1,2j+1}$ dan $z_{2i-1,2j+2}$.

   Kasus 2: $A \subseteq V(S_H(P_n^m))$

Ambil simpul di $A \subseteq V(S_H(P_n^m))$, untuk m gasal pada graf lintasan $S_H(P_n^m)$ merupakan graf yang berderajat 2, maka $z_{2i-1,3j-2} \in A$ dapat mendominasi 3 simpul dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Simpul $z_{2i-1,3j-2} \in A$ dapat mendominasi simpul $x_{2i-1,3j-2}; x_{2i-1,3j-1}$ dan $z_{2i-1,3j-2}$.

Jika $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \leq \frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9}$ untuk $m \equiv 0 \pmod 3$, dan $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor\frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9}\rfloor$ untuk $m \equiv 1 \pmod 3$, serta $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \leq lceil\frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9}\rceil$ untuk $m \equiv 2 \pmod 3$ bilangan dominasi yang minimum, maka andaikan $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \leq \frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9} - 1$. Karena setiap simpul pada A maksimum dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$\frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9} - 1)5 = \frac{5m(7n-2)+15(n-1)}{9} < \frac{5m(7n-2)+30(n+1)}{9}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $S_H(C_m \times P_n)$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan $z_{1,2} \in A$, bukan elemen dari A maka simpul $x_{1,1}; x_{1,2}$ dan $z_{1,2}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \nleq \frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9} - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9} - 1$. Jadi pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma(S_H(C_m \times P_n)) \leq \frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9}$ merupakan bilangan dominasi minimum pada $S_H(C_m \times P_n)$.

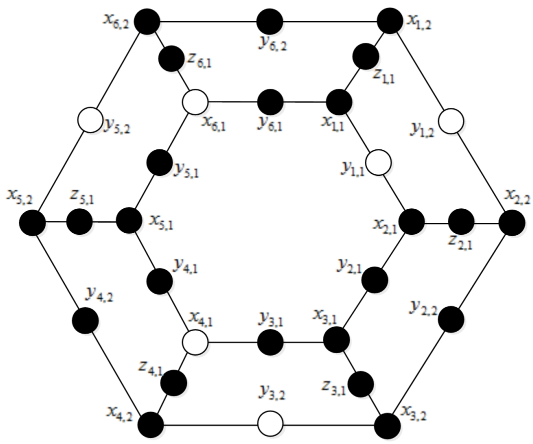
Jadi, dapat disimpulkan bahwa himpunan dominasi jarak satu untuk graf $S_H(D_{m,n})$ atau graf $S_H(C_m \times P_n)$ adalah $A = \{x_{2i,2j}; x_{2i,6j-1}; x_{2i-1,3j-1}; x_{2i,2j+1}; x_{6i-3,3j-1}; x_{6i-2,6j-3}; x_{6i-2,4j}; x_{6i-2,4j-3}; x_{3i,1}; y_{3i-2,1}; z_{2i-1,3j} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{2i,6j-3}; x_{2i-1,3j}; x_{1,2j}; x_{2i-1,2j+2}; x_{3i,6j-2}; x_{3i+1,6j-2}; y_{3i-2,6j-2}; z_{2i-1,3j-2} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{2i-1,3j}; x_{2i,2j-1}; x_{2i-1,2j+2}; z_{2i-1,3j-2} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$.

Teorema 4.4. *Diberikan batas atas dari subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{m,n})$ yang diperoleh dari $S_H(C_m \times P_n)$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$. Bilangan dominasi jarak satu subdivisi graf prisma $S_H(D_{m,n})$ adalah $\lceil\frac{m(3n-1)}{5}\rceil$*

Bukti: Berdasarkan Teorema 4.1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\triangle(S_H(D_{m,n}))} \rceil \leq \gamma(S_H(D_{m,n})) \leq p - \triangle(S_H(D_{m,n}))$, sehingga batas atas dari graf $S_H(D_{m,n})$ adalah $\lceil \frac{m(3n-1)}{1+\triangle(S_H(D_{m,n}))} \rceil \leq \gamma(S_H(D_{m,n})) \leq m(3n-1) - \triangle(S_H(D_{m,n}))$. Untuk graf $S_H(D_{m,n})$ memiliki $\triangle(S_H(D_{m,n})) = 4$, maka $\lceil \frac{m(3n-1)}{5} \rceil \leq \gamma(S_H(D_{m,n})) \leq m(3n-1) - 4$. Sehingga $\gamma(S_H(D_{m,n})) \leq \lceil \frac{m(3n-1)}{5} \rceil$. Jadi, $\gamma(S_H(D_{m,n})) \leq \lceil \frac{m(3n-1)}{5} \rceil$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.

4.2.2 Bilangan Dominasi Jarak Dua dari Subdivisi Homogen Graf Prisma

Dalam subbab ini dijelaskan bilangan dominasi jarak dua pada subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{m,n})$ untuk sebarang nilai m, n dengan $m \geq 3$ dan $n \geq 2$ yang dinotasikan $\gamma_2(S_H(D_{m,n}))$. Perhatikan Gambar 4.8 berikut yang merupakan konstruksi subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{6,2})$ dengan simpul-simpul putih sebagai elemen himpunan dominasi jarak dua. Hasil observasi menunjukkan bahwa bilangan dominasinya adalah 6.



Gambar 4.8: Subdivisi Homogen Graf Prisma $S_H(D_{6,2})$ dengan Simpul-simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Dua

Observasi 4.1. *Diberikan subdivisi homogen graf prisma jarak dua $S_H(D_{3,n})$ yang diperoleh dari $S_H(C_3 \times P_n)$ untuk $n \geq 2$. Bilangan dominasi jarak dua subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{3,n})$ adalah*

$$\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \leq \begin{cases} \frac{35n+5}{25} & \text{jika } n \equiv 2 \text{ (mod 5)} \\ \lfloor \frac{35n+5}{25} \rfloor & \text{jika } n \equiv 0 \text{ (mod 5)}, n \equiv 3 \text{ (mod 5)} \\ \lceil \frac{35n+5}{25} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \text{ (mod 5)}, n \equiv 4 \text{ (mod 5)} \end{cases}$$

Bukti: Jumlah simpul pada graf $(S_H(C_3 \times P_n))$ adalah $3(3n-1)$. Misalkan C_3^n adalah subdivisi homogen graf lingkaran C_3 ke-n dan P_n^3 adalah graf lintasan P_n ke-3. Himpunan dominasi jarak dua graf $S_H(C_3 \times P_n)$ berupa simpul-simpul di $V(S_H(C_3^n)) \cap V(S_H(P_n^3))$, atau berupa simpul-simpul di $S_H(C_3^n)$ tanpa simpul $S_H(P_n^3)$, begitupun sebaliknya. Untuk menunjukkan banyak simpul minimum yang menjadi elemen dominasi jarak dua graf $S_H(C_3 \times P_n)$, akan dibagi menjadi tiga kasus. Kasus pertama, jika elemen himpunan dominasi A_2 merupakan elemen himpunan simpul $V(S_H(C_3^n)) \cap V(S_H(P_n^3))$, kasus kedua jika elemen himpunan dominasi A_2 diambil dari simpul di $V(S_H(C_3^n))$, dan kasus ketiga jika elemen himpunan dominasi A_2 diambil dari simpul di $V(S_H(P_n^3))$.

1. $n \equiv 0$ (mod 5)
   Kasus 1: $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n)) \cap V(S_H(P_n^3))$
   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$, karena subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_3^n)$ merupakan graf yang berderajat 2 dan setiap simpul graf lingkaran $S_H(C_3^n)$ di graf $S_H(C_3 \times P_n)$ terhubung dengan simpul-simpul pada subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n^3)$, maka untuk setiap $x_{3,5j-3} \in V(S_H(C_3^n)) \cap V(S_H(P_n^3))$ dengan $j \in \{1,2,3,...,n\}$ dan $deg(x_{3,5j-3}) = 2$ dapat mendominasi maksimum 5 simpul, yaitu dua kali 2 simpul tetangga dan dirinya sendiri. Untuk setiap simpul $x_{3,5j-3} \in A_2$ dapat mendominasi maksimum 5 simpul, yaitu $x_{3,5j-2}; x_{3,5j-3}; x_{3,5j-4}; z_{3,5j-3}$ dan $z_{3,5j-4}$ dengan $j \in \{1,2,3,...,n\}$.
   Kasus 2: $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$
   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$ dengan subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_3^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, tetapi jika suatu simpul berada di persimpangan, maka berderajat 3 yang dapat mendominasi 7 simpul, yaitu dua kali tiga simpul tetangga dan satu simpul dirinya sendiri. Simpul $y_{1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 7 simpul, antara lain $x_{1,j+1}; x_{2,j+1}; y_{1,j+1}; y_{2,j+1}; y_{4,j+1}; z_{1,j}$ dan $z_{2,j}$ dengan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Untuk setiap simpul $y_{1,1} \in A_2$ yang dapat mendominasi simpul $x_{1,1}; x_{2,1}; y_{1,1}; y_{2,1}$ dan $y_{4,1}$.
   Kasus 3: $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^3))$
   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^3))$, untuk setiap simpul di $n \equiv 0$ (mod 5) pada graf lintasan $S_H(P_n^3)$ merupakan graf yang berderajat 2. Sehingga, simpul $z_{3,5j-1} \in A_2$ dapat mendominasi 4 simpul, antara lain simpul $x_{3,5j}; x_{3,5j-1}; z_{3,5j-1}$ dan $z_{3,5j-2}$ dengan $j \in \{1,2,3,...,n\}$.

Jika $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \leq \lfloor \frac{35n+5}{25} \rfloor$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum, maka andaikan $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \leq \lfloor \frac{35n+5}{25} \rfloor - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\tfrac{35n+5}{25} - 1)7 = \tfrac{245n-140}{25} < \tfrac{245n+35}{25}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $S_H(C_3 \times P_n)$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan simpul $z_{3,4} \notin A_2$, maka simpul $x_{3,5}; x_{3,4}$ dan $z_{3,3}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \nleq \lfloor \frac{35n+5}{25} \rfloor - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\lfloor \frac{35n+5}{25} \rfloor - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \leq \lfloor \frac{35n+5}{25} \rfloor$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_3 \times P_n)$.

2. $n \equiv 1$ (mod 5)
   Kasus 1: $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n)) \cap V(S_H(P_n^3))$
   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$, karena subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_3^n)$ merupakan graf yang berderajat 2 dan setiap simpul graf lingkaran $S_H(C_3^n)$ di graf $S_H(C_3 \times P_n)$ terhubung dengan simpul-simpul pada subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n^3)$, maka untuk setiap $x_{3,5j-3} \in V(S_H(C_3^n)) \cap V(S_H(P_n^3))$ dan $deg(x_{3,5j-3}) = 2$ dapat mendominasi maksimum 5 simpul, yaitu dua kali 2 simpul tetangga dan dirinya sendiri. Untuk setiap simpul $x_{3,5j-3} \in A_2$ dapat mendominasi maksimum 5 simpul, yaitu $x_{3,5j-2}; x_{3,5j-3}; x_{3,5j-4}; z_{3,5j-3}$ dan $z_{3,5j-4}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk $n \equiv 1$ (mod 5) terdapat suatu simpul yang mendominasi dirinya sendiri, yaitu $x_{3,5j+1} \in A_2$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.
   Kasus 2: $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$
   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$ dengan subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_3^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, tetapi jika suatu simpul berada di persimpangan, maka berderajat 3 yang dapat mendominasi 7 simpul, yaitu dua kali tiga simpul tetangga dan satu simpul dirinya sendiri.Simpul $y_{1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 7 simpul, antara lain $x_{1,j+1}$; $x_{2,j+1}; y_{1,j+1}; y_{2,j+1}; y_{4,j+1}; z_{1,j}$ dan $z_{2,j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk

setiap simpul $y_{1,1} \in A_2$ yang dapat mendominasi simpul $x_{1,1}; x_{2,1}; y_{1,1}; y_{2,1}$ dan $y_{4,1}$.

Kasus 3: $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^3))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^3)$, untuk setiap simpul di $n \equiv 1$ (mod 5) pada graf lintasan $S_H(P_n^3)$ merupakan graf yang berderajat 2. Sehingga, simpul $z_{3,5j-1} \in A_2$ dapat mendominasi 5 simpul, antara lain simpul $x_{3,5j}; x_{3,5j-1}; z_{3,5j}; z_{3,5j-1}$ dan $z_{3,5j-2}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Jika $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \leq \lceil \frac{35n+5}{25} \rceil$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum, maka andaikan $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \leq \lceil \frac{35n+5}{25} \rceil - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{35n+5}{25} - 1)7 = \frac{245n-140}{25} < \frac{245n+35}{25}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $C_3 \times P_n$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan simpul $z_{3,4} \notin A_2$, maka simpul $x_{3,5}; x_{3,4}; z_{3,5}; z_{3,4}$ dan $z_{3,3}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \nleq \lceil \frac{35n+5}{25} \rceil - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\frac{35n+5}{25} - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \leq \lceil \frac{35n+5}{25} \rceil$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_3 \times P_n)$.

3. $n \equiv 2$ (mod 5)

   Kasus 1: $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$

   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$ dengan subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_3^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, tetapi jika suatu simpul berada di persimpangan, maka berderajat 3 yang dapat mendominasi 7 simpul, yaitu dua kali tiga simpul tetangga dan satu simpul dirinya sendiri. Simpul $y_{1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 7 simpul, antara lain $x_{1,j+1}; x_{2,j+1}; y_{1,j+1}; y_{2,j+1}; y_{4,j+1}; z_{1,j}$ dan $z_{2,j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk setiap simpul $y_{1,1} \in A_2$ yang dapat mendominasi simpul $x_{1,1}; x_{2,1}; y_{1,1}; y_{2,1}$ dan $y_{4,1}$.

   Kasus 2: $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^3))$

   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^3)$, untuk setiap simpul di $n \equiv 2$ (mod 5) pada graf lintasan $S_H(P_n^3)$ merupakan graf yang berderajat 2. Sehingga, simpul

$z_{3,5j-4} \in A_2$ dapat mendominasi 3 simpul, antara lain simpul $x_{3,5j-4}; x_{3,5j-3}$ dan $z_{3,5j-4}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Jika $\gamma_2(C_3 \times P_n) \leq \frac{35n+5}{25}$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum, maka andaikan $\gamma_2(C_3 \times P_n) \leq \frac{35n+5}{25} - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{35n+5}{25} - 1)7 = \frac{245n-140}{25} < \frac{245n+35}{25}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $C_3 \times P_n$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan simpul $z_{3,1} \notin A_2$, maka simpul $x_{3,1}; x_{3,2}$ dan $z_{3,1}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \nleq \frac{35n+5}{25} - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\frac{35n+5}{25} - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \leq \frac{35n+5}{25}$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_3 \times P_n)$.

4. $n \equiv 3$ (mod 5)

   Kasus 1: $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n)) \cap V(S_H(P_n^3))$

   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$, karena subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_3^n)$ merupakan graf yang berderajat 2 dan setiap simpul graf lingkaran $S_H(C_3^n)$ di graf $S_H(C_3 \times P_n)$ terhubung dengan simpul-simpul pada subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n^3)$, maka untuk setiap $x_{3,5j-3} \in V(S_H(C_3^n)) \cap V(S_H(P_n^3))$ dan $deg(x_{3,5j-3}) = 2$ dapat mendominasi maksimum 5 simpul, yaitu dua kali 2 simpul tetangga dan dirinya sendiri. Untuk setiap simpul $x_{3,5j-3} \in A_2$ dapat mendominasi maksimum 5 simpul, yaitu $x_{3,5j-2}; x_{3,5j-3}; x_{3,5j-4}; z_{3,5j-3}$ dan $z_{3,5j-4}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

   Kasus 2: $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$

   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$ dengan subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_3^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, tetapi jika suatu simpul berada di persimpangan, maka berderajat 3 yang dapat mendominasi 7 simpul, yaitu dua kali tiga simpul tetangga dan satu simpul dirinya sendiri. Simpul $y_{1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 7 simpul, antara lain $x_{1,j+1}; x_{2,j+1}; y_{1,j+1}; y_{2,j+1};$

$y_{4,j+1}; z_{1,j}$ dan $z_{2,j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk setiap simpul $y_{1,1} \in A_2$ yang dapat mendominasi simpul $x_{1,1}; x_{2,1}; y_{1,1}; y_{2,1}$ dan $y_{4,1}$.

Jika $\gamma_2(C_3 \times P_n) \leq \lceil \frac{35n+5}{25} \rceil$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum, maka andaikan $\gamma_2(C_3 \times P_n) \leq \lceil \frac{35n+5}{25} \rceil - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{35n+5}{25} - 1)7 = \frac{245n-140}{25} < \frac{245n+35}{25}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $C_3 \times P_n$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan simpul $y_{1,1} \notin A_2$, maka simpul $x_{1,1}; x_{2,1}; y_{1,1}; y_{2,1}$ dan $y_{4,1}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \nleq \lceil \frac{35n+5}{25} \rceil - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\frac{35n+5}{25} - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \leq \lceil \frac{35n+5}{25} \rceil$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_3 \times P_n)$.

5. $n \equiv 4$ (mod 5)
   Kasus 1: $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n)) \cap V(S_H(P_n^3))$
   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$, karena subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_3^n)$ merupakan graf yang berderajat 2 dan setiap simpul graf lingkaran $S_H(C_3^n)$ di graf $S_H(C_3 \times P_n)$ terhubung dengan simpul-simpul pada subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n^3)$, maka untuk setiap $x_{3,5j-3} \in V(S_H(C_3^n)) \cap V(S_H(P_n^3))$ dan $deg(x_{3,5j-3}) = 2$ dapat mendominasi maksimum 5 simpul, yaitu dua kali 2 simpul tetangga dan dirinya sendiri. Untuk setiap simpul $x_{3,5j-3} \in A_2$ dapat mendominasi maksimum 5 simpul, yaitu $x_{3,5j-2}; x_{3,5j-3}; x_{3,5j-4}; z_{3,5j-3}$ dan $z_{3,5j-4}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk $n \equiv 4$ (mod 5) terdapat simpul $x_{3,5j-1} \in A_2$ yang dapat mendominasi 2 simpul, yaitu simpul $x_{3,5j-1}$ dan $z_{3,5j-2}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.
   Kasus 2: $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$
   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_3^n))$ dengan subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_3^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, tetapi jika suatu simpul berada di persimpangan, maka berderajat 3 yang dapat mendominasi 7 simpul, yaitu dua kali tiga simpul tetangga dan satu simpul dirinya sendiri. Simpul $y_{1,j+1} \in$

A_2 dapat mendominasi 7 simpul, antara lain $x_{1,j+1}; x_{2,j+1}; y_{1,j+1}; y_{2,j+1}; y_{4,j+1}; z_{1,j}$ dan $z_{2,j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk setiap simpul $y_{1,1} \in A_2$ yang dapat mendominasi simpul $x_{1,1}; x_{2,1}; y_{1,1}; y_{2,1}$ dan $y_{4,1}$.

Jika $\gamma_2(C_3 \times P_n) \leq \lceil \frac{35n+5}{25} \rceil$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum, maka andaikan $\gamma_2(C_3 \times P_n) \leq \lceil \frac{35n+5}{25} \rceil - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{35n+5}{25} - 1)7 = \frac{245n-140}{25} < (\frac{245n+35}{25}).$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $C_3 \times P_n$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan simpul $y_{1,2} \notin A_2$, maka simpul $x_{1,3}; x_{2,3}; y_{1,2}; y_{2,3}; y_{4,3}; z_{1,2}$ dan $z_{2,3}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2.

Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \nleq \frac{35n+5}{25} - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\frac{35n+5}{25} - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_3 \times P_n)) \leq \frac{35n+5}{25}$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_3 \times P_n)$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa himpunan dominasi jarak dua untuk graf $S_H(D_{3,n})$ atau graf $S_H(C_3 \times P_n)$ adalah $A_2 = \{x_{3,5j-3} | 1 \leq j \leq n\} \cup x_{3,5j-1} | 1 \leq j \leq n\} \cup x_{3,5j+1} | 1 \leq j \leq n\} \cup y_{1,1}; y_{1,j+1} | 1 \leq j \leq n\} \cup z_{3,5j-4} | 1 \leq j \leq n\} \cup z_{3,5j-1} | 1 \leq j \leq n\}$.

Observasi 4.2. *Diberikan subdivisi homogen graf prisma jarak dua $S_H(D_{4,n})$ yang diperoleh dari $C_4 \times P_n$ untuk $n \geq 2$. Bilangan dominasi jarak dua subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{4,n})$ adalah $\gamma_2(C_4 \times P_n) \leq \frac{50n}{25}$*

Bukti: Jumlah simpul pada graf $C_4 \times P_n$ adalah $4(3n-1)$. Misalkan C_4^n adalah graf lingkaran C_4 ke-n dan P_n^4 adalah graf lintasan P_n ke-4. Himpunan dominasi jarak dua graf $C_4 \times P_n$ berupa simpul-simpul di simpul-simpul di $S_H(C_4^n)$ tanpa simpul $S_H(P_n^4)$. Untuk menunjukkan banyak simpul minimum yang menjadi elemen dominasi jarak dua graf $C_4 \times P_n$, akan dibagi menjadi satu kasus. Jika elemen himpunan dominasi A_2 merupakan elemen himpunan simpul di $V(S_H(C_4^n))$.

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_4^n))$ dengan subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_4^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, tetapi jika suatu simpul berada di persimpangan, maka berderajat 3 yang dapat mendominasi 7 simpul, yaitu dua kali tiga simpul tetangga dan satu simpul dirinya sendiri. Simpul $y_{1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 7 simpul, antara lain $x_{1,j+1}; x_{2,j+1}; y_{1,j+1}; y_{2,j+1}; y_{4,j+1}; z_{1,j}$ dan $z_{2,j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $y_{3,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 6 simpul, yaitu simpul $x_{3,j+1}; x_{4,j+1}; y_{3,j+1}; y_{4,j+1}; z_{3,j}$ dan $z_{4,j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, untuk simpul $y_{2,1} \in A_2$ dapat mendominasi 5 simnpul antara lain, simpul $x_{2,1}; x_{3,1}; y_{1,1}; y_{2,1}$ dan $y_{3,1}$. Terdapat simpul $y_{3,1} \in A_2$ yang dapat mendominasi 3 simpul, yaitu simpul $x_{3,1}; x_{4,1}$ dan $y_{3,1}$.

Jika $\gamma_2(C_4 \times P_n) \leq \frac{50n}{25}$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum, maka andaikan $\gamma_2(C_4 \times P_n) \leq \frac{50n}{25} - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\tfrac{50n}{25} - 1)7 = \tfrac{350n-175}{25} < \tfrac{350n}{25}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $C_4 \times P_n$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan simpul $y_{3,1} \notin A_2$, maka simpul $x_{3,1}$ dan $x_{4,1}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2.

Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_4 \times P_n)) \nleq \frac{50n}{25} - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\frac{50n}{25} - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_4 \times P_n)) \leq \frac{50n}{25}$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_4 \times P_n)$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa himpunan dominasi jarak dua untuk graf $S_H(D_{4,n})$ atau graf $S_H(C_4 \times P_n)$ adalah $A_2 = \{y_{1,j+1}; y_{2,1}; y_{3,1}; y_{3,j+1} | 1 \leq j \leq n\}$.

Observasi 4.3. *Diberikan subdivisi homogen graf prisma jarak dua $S_H(D_{5,n})$ yang diperoleh dari $S_H(C_5 \times P_n)$ untuk $n \geq 2$. Bilangan dominasi jarak dua subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{5,n})$ adalah $\gamma_2(S_H(C_5 \times P_n)) \leq \lfloor \frac{60n}{25} \rfloor$*

Bukti: Jumlah simpul pada graf $C_5 \times P_n$ adalah $5(3n - 1)$. Misalkan C_5^n adalah graf lingkaran C_5 ke-n dan P_n^5 adalah graf lintasan P_n ke-5. Himpunan dominasi jarak dua graf $C_5 \times P_n$ berupa simpul-simpul di $V(S_H(C_5^n)) \cap V(S_H(P_n^5))$, atau berupa simpul-simpul di $S_H(C_5^n)$ tanpa simpul $S_H(P_n^5)$, begitupun sebaliknya. Untuk menunjukkan banyak simpul minimum yang menjadi elemen dominasi jarak dua graf $S_H(C_5 \times P_n)$, akan dibagi menjadi tiga kasus. Kasus pertama, jika elemen himpunan dominasi A_2 merupakan elemen himpunan simpul $V(S_H(C_5^n)) \cap V(S_H(P_n^5))$, kasus kedua jika elemen himpunan dominasi A_2 diambil dari simpul di $V(S_H(C_5^n))$, dan kasus ketiga jika elemen himpunan dominasi A_2 diambil dari simpul di $V(S_H(P_n^5))$.

Kasus 1: $A_2 \subseteq V(S_H(C_5^n)) \cap V(S_H(P_n^5))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_5^n))$, dan setiap simpul graf lingkaran $S_H(C_5^n)$ di graf $S_H(C_5 \times P_n)$ terhubung dengan simpul-simpul pada subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n^5)$, maka untuk setiap $x_{5,1} \in V(S_H(C_5^n)) \cap V(S_H(P_n^5))$ dan $deg(x_{3,5j-3}) = 3$ dapat mendominasi maksimum 7 simpul, yaitu dua kali 3 simpul tetangga dan dirinya sendiri. Untuk setiap simpul $x_{5,1} \in A_2$ dapat mendominasi maksimum 7 simpul, yaitu $x_{1,1}; x_{4,1}; x_{5,1}; x_{5,2}; y_{4,1}; y_{5,1}$ dan $z_{5,1}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk semua $n \in Z^+$.

Tetapi tidak berlaku untuk $n \equiv 0$ (mod 5), $n \equiv 2$ (mod 5) dan $n \equiv 3$ (mod 5). Untuk $n \equiv 0$ (mod 5) terdapat simpul $x_{5,5j} \in A_2$ yang dapat mendominasi dirinya sendiri. Setiap simpul $x_{5,5j+1} \in A_2$ di $n \equiv 2$ (mod 5) dapat mendominasi 5 simpul, yaitu simpul $x_{5,5j}; x_{5,5j+2}; z_{5,5j}$ dan $z_{5,5j+1}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, untuk $n \equiv 3$ (mod 5) terdapat simpul $x_{5,5j-2} \in A_2$ yang dapat mendominasi 2 simpul, yaitu simpul $x_{5,5j-2}$ dan $z_{5,5j-3}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Kasus 2: $A_2 \subseteq V(S_H(C_5^n))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_5^n))$ dengan subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_5^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, tetapi jika suatu simpul berada di persimpangan, maka berderajat 3 yang dapat mendominasi 7 simpul, yaitu dua kali tiga simpul tetangga dan satu simpul dirinya sendiri. Simpul $y_{1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 7 simpul, antara lain $x_{1,j+1}; x_{2,j+1}; y_{1,j+1}; y_{2,j+2}; y_{5,j+2}; z_{1,j}$ dan $z_{2,j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $y_{3,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 6 simpul, yaitu simpul $x_{3,j+1}; x_{4,j+1}; y_{3,j+1}; y_{4,j+1}; z_{3,j}$ dan $z_{4,j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, untuk simpul $y_{2,1} \in A_2$ dapat mendominasi 5 simnpul antara lain, simpul $x_{2,1}; x_{3,1}; y_{1,1}; y_{2,1}$ dan $y_{3,1}$.

Kasus 3: $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^5))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^5)$, untuk setiap simpul di $n \equiv 1$ (mod 5) pada graf lintasan $S_H(P_n^5)$ merupakan graf yang berderajat 2. Sehingga, simpul $z_{5,5j} \in A_2$ dapat mendominasi 3 simpul, antara lain simpul $x_{5,5j}; x_{5,5j+1}$ dan $z_{5,5j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $z_{5,5j-2} \in A_2$ di $n \equiv 4$ (mod 5) dapat mendominasi 4 simpul, yaitu simpul $x_{5,5j-1}; x_{5,5j-2}; z_{5,5j-2}$ dan $z_{5,5j-3}$ dengan

$j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk setiap simpul $z_{5,5j-2} \in A_2$ di $n \equiv 0$ (mod 5) dapat mendominasi 5 simpul antara lain, simpul $x_{5,5j-1}; x_{5,5j-2}; z_{5,5j-1}; z_{5,5j-2}$ dan $z_{5,5j-3}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Jika $\gamma_2(S_H(C_5 \times P_n)) \leq \lfloor \frac{60n}{25} \rfloor$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum, maka andaikan $\gamma_2(S_H(C_5 \times P_n)) \leq \lfloor \frac{60n}{25} \rfloor - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{60n}{25} - 1)7 = \frac{7(12n-5)}{5} < \frac{7(12n)}{5}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $S_H(C_5 \times P_n)$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan simpul $x_{5,1} \notin A_2$, maka simpul $x_{1,1}; x_{4,1}; x_{5,2}; y_{4,1}; y_{5,1}$ dan $z_{5,1}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2.

Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_5 \times P_n)) \nleq \lfloor \frac{60n}{25} \rfloor - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\lfloor \frac{60n}{25} \rfloor - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_5 \times P_n)) \leq \lfloor \frac{60n}{25} \rfloor$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_5 \times P_n)$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa himpunan dominasi jarak dua untuk graf $S_H(D_{5,n})$ atau graf $S_H(C_5 \times P_n)$ adalah $A_2 = \{x_{5,1}; x_{5,5j}; x_{5,5j+1}; x_{5,5j-2} | 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{1,j+1}; y_{2,1}; y_{3,j+1} | 1 \leq j \leq n\} \cup \{|1 \leq j \leq n\} \cup \{z_{5,5j-2} | 1 \leq j \leq n\}$.

Teorema 4.5. *Diberikan subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{m,n})$ yang diperoleh dari $S_H(C_m \times P_n)$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$. Bilangan dominasi jarak dua subdivisi homogen graf prisma $S_H(D_{m,n})$ adalah*

$$\gamma_2(C_m \times P_n) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{n(13m-5)+(-m+5)}{25} \rfloor & \textit{jika } m \equiv 0 \textit{ (mod 5); } n \geq 3 \\ \frac{3n(4m+1)+4(-m+6)}{25} & \textit{jika } m \equiv 1 \textit{ (mod 5); } n \geq 3 \\ \lfloor \frac{n(13m-6)+(-6m+47)}{25} \rfloor & \textit{jika } m \equiv 2 \textit{ (mod 5); } n \geq 3 \\ \lfloor \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rfloor & \textit{jika } m \equiv 3 \textit{ (mod 5); } n \equiv 0 \textit{ (mod 5)} \\ & \textit{atau } m \equiv 3 \textit{ (mod 5); } n \equiv 3 \textit{ (mod 5)} \\ \lceil \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rceil & \textit{jika } m \equiv 3 \textit{ (mod 5); } n \equiv 1 \textit{ (mod 5)} \\ & \textit{atau } m \equiv 3 \textit{ (mod 5); } n \equiv 4 \textit{ (mod 5)} \\ \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} & \textit{jika } m \equiv 3 \textit{ (mod 5); } n \equiv 2 \textit{ (mod 5)} \\ \frac{2n(6m+1)+4(-m+4)}{25} & \textit{jika } m \equiv 4 \textit{ (mod 5); } n \leq 3 \end{cases}$$

Bukti: Jumlah simpul pada graf $S_H(C_m \times P_n)$ adalah $m(3n-1)$. Misalkan C_m^n adalah graf lingkaran C_m ke-n dan P_n^m adalah graf lintasan P_n ke-m. Himpunan dominasi graf $S_H(C_m \times P_n)$ berupa simpul-simpul di $V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$, atau berupa simpul-simpul di $S_H(P_n^m)$ tanpa simpul $S_H(C_m^n)$, begitupun sebaliknya. Setiap simpul di graf P_n^m yang melekat pada graf C_m^n dapat dikatakan sebagai simpul-simpul di graf P_n^m ataupun simpul-simpul di graf C_m^n. Untuk menunjukkan banyak simpul minimum yang menjadi elemen dominasi jarak dua graf $S_H(C_m \times P_n)$, akan dibagi menjadi tiga kasus. Kasus pertama, jika elemen himpunan dominasi A_2 merupakan elemen himpunan simpul $V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$, kasus kedua jika elemen himpunan dominasi A_2 diambil dari simpul-simpul di $V(S_H(C_m^n))$, dan kasus ketiga jika elemen himpunan dominasi A_2 diambil dari simpul-simpul di $V(S_H(P_n^m))$.

1. $m \equiv 0$ (mod 5)

   Kasus 1: $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$

   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$, dan setiap simpul graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ di graf $S_H(C_m \times P_n)$ terhubung dengan simpul-simpul pada subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n^m)$, maka untuk setiap $x_{5i,1} \in V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$ dapat mendominasi 5 simpul antara lain, simpul $x_{5i-1,1}; x_{5i,1}; x_{5i+1}; y_{5i-1,1}$ dan $y_{5i,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk semua $m \in Z^+$.

   Untuk m gasal terdapat simpul $x_{10i-5,1} \in V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$ yang dapat mendominasi 7 simpul, yaitu dua kali 3 simpul tetangga dan dirinya sendiri. Untuk setiap simpul $x_{10i-5,1} \in A_2$ dapat mendominasi maksimum 7 simpul, yaitu $x_{1,1}; x_{10i-6,1}; x_{10i-5,1}; x_{10i-5,2}; y_{10i-6,1}; y_{10i-5,1}$ dan $z_{10i-5,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk $n \equiv 0$ (mod 5) terdapat simpul $x_{10i-5,5j} \in A_2$ yang dapat mendominasi dirinya sendiri. Setiap simpul $x_{10i-5,5j+1} \in A_2$ di $n \equiv 2$ (mod 5) dapat mendominasi 5 simpul, yaitu simpul $x_{10i-5,5j}; x_{10i-5,5j+2}; z_{10i-5,5j}$ dan $z_{10i-5,5j+1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, untuk $n \equiv 3$ (mod 5) terdapat simpul $x_{10i-5,5j-2} \in A_2$ yang dapat mendominasi 2 simpul, yaitu simpul $x_{10i-5,5j-2}$ dan $z_{10i-5,5j-3}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

   Kasus 2: $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$

   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$ dengan subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, tetapi jika suatu simpul berada di persimpangan, maka berderajat 3 yang dapat mendominasi

7 simpul, yaitu dua kali tiga simpul tetangga dan satu simpul dirinya sendiri. Simpul $y_{1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 7 simpul, antara lain $x_{1,j+1}; x_{2,j+1}; y_{1,j+1}; y_{2,j+1}; y_{5,j+1}; z_{1,j}$ dan $z_{2,j}$ dengan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Setiap simpul $y_{2i+1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 6 simpul yaitu, simpul $x_{2i+1,j+1}; x_{2i+2,j+1}; y_{2i+1,j+1}; y_{2i+2,j+1}; z_{2i+1,j}$ dan $z_{2i+2,j}$ untuk $i \in \{1,2,3,...,n\}$ dan $j \in \{1,2,3,...,n\}$.

Setiap simpul $y_{5i-3,1} \in A_2$ dapat mendominasi 5 simpul. Untuk setiap simpul $y_{5i-3,1} \in A_2$ dapat mendominasi antara lain, simpul $x_{5i-2,1}; x_{5i-3,1}; y_{5i-2,1}; y_{5i-3,1}$ dan $y_{5i-4,1}$ dengan $i \in \{1,2,3,...,n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk semua $m \in Z^+$. Sedangkan, setiap simpul $y_{10i-1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi yaitu, simpul $x_{10i-1,j+1}; x_{10i,j+1}; y_{10i-1,j+1}; z_{10i-1,j}$ dan $z_{10i,j}$ untuk $i \in \{1,2,3,...,n\}$ dan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk semua $m \in Z^+$, tetapi tidak berlaku untuk m genap.

Kasus 3: $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^m))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^m)$, untuk setiap simpul di $n \equiv 1 \pmod 5$ pada graf lintasan $S_H(P_n^m)$ merupakan graf yang berderajat 2. Sehingga, simpul $z_{10i-5,5j} \in A_2$ dapat mendominasi 3 simpul, antara lain simpul $x_{10i-5,5j}; x_{10i-5,5j+1}$ dan $z_{10i-5,5j}$ dengan $i \in \{1,2,3,...,n\}$ dan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Setiap simpul $z_{10i-5,5j-2} \in A_2$ di $n \equiv 4 \pmod 5$ dapat mendominasi 4 simpul, yaitu simpul $x_{10i-5,5j-1}; x_{10i-5,5j-2}; z_{10i-5,5j-2}$ dan $z_{10i-5,5j-3}$ dengan $i \in \{1,2,3,...,n\}$ dan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Untuk setiap simpul $z_{10i-5,5j-2} \in A_2$ di $n \equiv 0 \pmod 5$ dapat mendominasi 5 simpul antara lain, simpul $x_{10i-5,5j-1}; x_{10i-5,5j-2}; z_{10i-5,5j-1}; z_{10i-5,5j-2}$ dan $z_{10i-5,5j-3}$ dengan $i \in \{1,2,3,...,n\}$ dan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Pernyataan ini hanya berlaku untuk m gasal.

Jika $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor \frac{n(13m-5)+(-m+5)}{25} \rfloor$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum, maka andaikan $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor \frac{n(13m-5)+(-m+5)}{25} \rfloor - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{n(13m-5)+(-m+5)}{25} - 1)7 = \frac{7n(13m-5)+7(-m-20)}{25} < \frac{7n(13m-5)+7(-m+5)}{25}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $S_H(C_m \times P_n)$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan, jika simpul $y_{2,1} \notin A_2$, maka simpul

$x_{2,1}; x_{3,1}; y_{1,1}; y_{2,1}$ dan $y_{3,1}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \nleq \lfloor \frac{n(13m-5)+(-m+5)}{25} \rfloor - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\lfloor \frac{n(13m-5)+(-m+5)}{25} \rfloor - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor \frac{n(13m-5)+(-m+5)}{25} \rfloor$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_m \times P_n)$.

2. $m \equiv 1$ (mod 5)

Kasus 1: $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$, dan setiap simpul graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ di graf $S_H(C_m \times P_n)$ terhubung dengan simpul-simpul pada subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n^m)$, maka untuk setiap $x_{5i,1} \in V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$ dapat mendominasi 5 simpul antara lain, simpul $x_{5i-1,1}; x_{5i,1}; x_{5i+1}; y_{5i-1,1}$ dan $y_{5i,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk semua $m \in Z^+$.

Untuk m gasal di $n \equiv 0$ (mod 5) terdapat simpul $x_{10i+1,5j} \in A_2$ yang dapat mendominasi dirinya sendiri. Setiap simpul $x_{10i+1,5j+1} \in A_2$ di $n \equiv 2$ (mod 5) dapat mendominasi 5 simpul, yaitu simpul $x_{10i+1,5j}; x_{10i+1,5j+1}; x_{10i+1,5j+2}; z_{10i+1,5j}$ dan $z_{10i+1,5j+1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk $n \equiv 3$ (mod 5) terdapat simpul $x_{10i+1,5j-2} \in A_2$ yang dapat mendominasi 2 simpul, yaitu simpul $x_{10i+1,5j-2}$ dan $z_{10i+1,5j-3}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Pada $m \equiv 1$ (mod 5) terdapat juga simpul $x_{10i+1,1}$ yang dapat mendominasi 5 simpul, yaitu simpul $x_{1,1}; x_{10i+1,1}; x_{10i+1,2}; y_{10i+1,1}$ dan $z_{10i+1,1}$ untuk $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk m gasal. Tetapi tidak berlaku untuk m genap. Karena terdapat simpul $x_{1,1} \in V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$ yang dapat mendominasi 2 simpul, yaitu simpul $x_{1,1}$ dan $y_{10i-4,1}$.

Kasus 2: $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$ dengan subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, tetapi jika suatu simpul berada di persimpangan, maka berderajat 3 yang dapat mendominasi 7 simpul, yaitu dua kali tiga simpul tetangga dan satu simpul dirinya sendiri. Simpul $y_{1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 7 simpul, antara lain $x_{1,j+1}; x_{2,j+1}; y_{1,j+1}; y_{2,j+1}; y_{5,j+1}; z_{1,j}$ dan $z_{2,j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $y_{2i+1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 6 simpul yaitu, simpul $x_{2i+1,j+1}; x_{2i+2,j+1}; y_{2i+1,j+1}; y_{2i+2,j+1}; z_{2i+1,j}$ dan $z_{2i+2,j}$ untuk $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk setiap simpul $y_{5i-3,1} \in A_2$ dapat mendominasi 5 simpul.

Setiap simpul $y_{5i-3,1} \in A_2$ dapat mendominasi antara lain, simpul $x_{5i-2,1}; x_{5i-3,1}; y_{5i-2,1}; y_{5i-3,1}$ dan $y_{5i-4,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk semua $m \in Z^+$. Untuk m genap terdapat simpul $y_{10i-5,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 5 simpul yaitu, simpul $x_{10i-5,j+1}$; $x_{10i-4,j+1}; y_{10i-5,j+1}; z_{10i-5,j}$ dan $z_{10i-4,j}$ untuk $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Kasus 3: $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^m))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^m)$, untuk setiap simpul di $n \equiv 1$ (mod 5) pada graf lintasan $S_H(P_n^m)$ merupakan graf yang berderajat 2. Sehingga, simpul $z_{10i+1,5j} \in A_2$ dapat mendominasi 3 simpul, antara lain simpul $x_{10i+1,5j}; x_{10i+1,5j+1}$ dan $z_{10i+1,5j}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $z_{10i+1,5j-2} \in A_2$ di $n \equiv 4$ (mod 5) dapat mendominasi 4 simpul, yaitu simpul $x_{10i+1,5j-1}; x_{10i+1,5j-2}; z_{10i+1,5j-2}$ dan $z_{10i+1,5j-3}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk setiap simpul $z_{10i+1,5j-2} \in A_2$ di $n \equiv 0$ (mod 5) dapat mendominasi 5 simpul antara lain, simpul $x_{10i+1,5j-1}; x_{10i+110i+1,5j-2}; z_{10i+1,5j-1}; z_{10i+1,5j-2}$ dan $z_{10i+1,5j-3}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini hanya berlaku untuk m gasal.

Jika $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \frac{3n(4m+1)+4(-m+6)}{25}$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum, maka andaikan $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \frac{3n(4m+1)+4(-m+6)}{25} - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{3n(4m+1)+4(-m+6)}{25})7 = \frac{21n(4m+1)+7(-4m-1)}{25} < \frac{21n(4m+1)+28(-m+6)}{25}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $S_H(C_m \times P_n)$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan simpul $x_{5,8} \notin A_2$, maka simpul $z_{5,7}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \nleq \frac{3n(4m+1)+4(-m+6)}{25} - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\frac{3n(4m+1)+4(-m+6)}{25} - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq$

$\frac{3n(4m+1)+4(-m+6)}{25}$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_m \times P_n)$.

3. $m \equiv 2$ (mod 5)

   Kasus 1: $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$

   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$, dan setiap simpul graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ di graf $S_H(C_m \times P_n)$ terhubung dengan simpul-simpul pada subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n^m)$, maka untuk setiap $x_{5i,1} \in V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$ dapat mendominasi 5 simpul antara lain, simpul $x_{5i-1,1}; x_{5i,1}; x_{5i+1}; y_{5i-1,1}$ dan $y_{5i,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk semua $m \in Z^+$.

   Untuk m gasal terdapat simpul $x_{10i-3,1} \in V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$ yang dapat mendominasi 6 simpul. Setiap simpul $x_{10i-3,1} \in A_2$ dapat mendominasi 6 simpul, yaitu $x_{1,1}; x_{10i-3,1}; x_{10i-3,2}; y_{10i-4,1}; y_{10i-3,1}$ dan $z_{10i-3,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk $n \equiv 0$ (mod 5) terdapat simpul $x_{10i-3,5j} \in A_2$ yang dapat mendominasi dirinya sendiri. Setiap simpul $x_{10i-3,5j+1} \in A_2$ di $n \equiv 2$ (mod 5) dapat mendominasi 5 simpul, yaitu simpul $x_{10i-3,5j}; x_{10i-3,5j+1}; x_{10i-3,5j+2}; z_{10i-3,5j}$ dan $z_{10i-3,5j+1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk $n \equiv 3$ (mod 5) terdapat simpul $x_{10i-3,5j-2} \in A_2$ yang dapat mendominasi 2 simpul, yaitu simpul $x_{10i-3,5j-2}$ dan $z_{10i-3,5j-3}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

   Sedangkan, untuk m genap terdapat simpul $x_{10i+2,1} \in A_2$ yang dapat mendominasi 4 simpul. Setiap simpul $x_{10i+2,1} \in A_2$ dapat mendominasi 6 simpul, yaitu $x_{1,1}; x_{10i+2,1}; y_{10i+1,1}$ dan $y_{10i+2,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

   Kasus 2: $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$

   Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$ dengan subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, tetapi jika suatu simpul berada di persimpangan, maka berderajat 3 yang dapat mendominasi 7 simpul, yaitu dua kali tiga simpul tetangga dan satu simpul dirinya sendiri. Simpul $y_{1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 7 simpul, antara lain $x_{1,j+1}; x_{2,j+1}; y_{1,j+1}; y_{2,j+1}; y_{5,j+1}; z_{1,j}$ dan $z_{2,j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $y_{2i+1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 6 simpul yaitu, simpul $x_{2i+1,j+1}; x_{2i+2,j+1}; y_{2i+1,j+1}; y_{2i+2,j+1}; z_{2i+1,j}$ dan $z_{2i+2,j}$ untuk $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

   Setiap simpul $y_{5i-3,1} \in A_2$ dapat mendominasi 5 simpul. Untuk setiap simpul $y_{5i-3,1} \in A_2$ dapat mendominasi antara lain, simpul $x_{5i-2,1}; x_{5i-3,1};$

$y_{5i-2,1}; y_{5i-3,1}$ dan $y_{5i-4,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini hanya berlaku untuk $m \in Z^+$. Sedangkan, setiap simpul $y_{10i+1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi yaitu, simpul $x_{10i+1,j+1}; x_{10i+2,j+1}; y_{10i+1,j+1}; z_{10i+1,j}$ dan $z_{10i+2,j}$ untuk $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini hanya berlaku untuk m genap.

Kasus 3: $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^m))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^m)$, untuk setiap simpul di $n \equiv 1 \pmod 5$ pada graf lintasan $S_H(P_n^m)$ merupakan graf yang berderajat 2. Sehingga, simpul $z_{10i-3,5j} \in A_2$ dapat mendominasi 3 simpul, antara lain simpul $x_{10i-3,5j}; x_{10i-3,5j+1}$ dan $z_{10i-3,5j}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $z_{10i-3,5j-2} \in A_2$ di $n \equiv 4 \pmod 5$ dapat mendominasi 4 simpul, yaitu simpul $x_{10i-3,5j-1}; x_{10i-3,5j-2}; z_{10i-3,5j-2}$ dan $z_{10i-3,5j-3}$ untuk $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk setiap simpul $z_{10i-3,5j-2} \in A_2$ di $n \equiv 0 \pmod 5$ dapat mendominasi 5 simpul antara lain, simpul $x_{10i-3,5j-1}; x_{10i-3,5j-2}; z_{10i-3,5j-1}; z_{10i-3,5j-2}$ dan $z_{10i-3,5j-3}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini hanya berlaku untuk m gasal.

Jika $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor\frac{n(13m-6)+(-6m+47)}{25}\rfloor$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum, maka andaikan $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor\frac{n(13m-6)+(-6m+47)}{25}\rfloor - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{7n(13m-6)+7(-6m+47)}{25} - 1)7 = \frac{7n(13m-6)+7(-6m+22)}{25} < \frac{7n(13m-6)+7(-6m+47)}{25}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $S_H(C_m \times P_n)$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan simpul $y_{1,3} \notin A_2$, maka simpul $x_{1,4}; x_{2,4}; y_{1,3}; y_{2,4}; y_{4,4}; z_{1,3}$ dan $z_{2,4}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \nleq \lfloor\frac{n(13m-6)+(-6m+47)}{25}\rfloor - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\lfloor\frac{n(13m-6)+(-6m+47)}{25}\rfloor - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor\frac{n(13m-6)+(-6m+47)}{25}\rfloor$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_m \times P_n)$.

4. $m \equiv 3 \pmod 5$

Kasus 1: $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$, dan setiap simpul graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ di graf $S_H(C_m \times P_n)$ terhubung dengan simpul-simpul pada subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n^m)$, maka untuk setiap $x_{5i,1} \in V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$ dapat mendominasi 5 simpul antara lain, simpul $x_{5i-1,1}; x_{5i,1}; x_{5i+1}; y_{5i-1,1}$ dan $y_{5i,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk semua $m \in Z^+$.

Untuk m gasal terdapat simpul $x_{10i+3,1} \in V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$ yang dapat mendominasi 7 simpul, yaitu dua kali 3 simpul tetangga dan dirinya sendiri. Untuk setiap simpul $x_{10i+3,1} \in A_2$ dapat mendominasi maksimum 7 simpul, yaitu $x_{1,1}; x_{10i+2,1}; x_{10i+3,1}; x_{10i+3,2}; y_{10i+2,1}; y_{10i+3,1}$ dan $z_{10i+3,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, untuk m genap terdapat simpul $x_{1,1} \in A_2$ dapat mendominasi dirinya sendiri.

Pada $n \equiv 0 \pmod 5$ terdapat simpul $x_{10i+3,5j} \in A_2$ yang dapat mendominasi dirinya sendiri. Setiap simpul $x_{10i+3,5j+1} \in A_2$ di $n \equiv 2 \pmod 5$ dapat mendominasi 5 simpul, yaitu simpul $x_{10i+3,5j}; x_{10i+3,5j+1}; x_{10i+3,5j+2}; z_{10i+3,5j}$ dan $z_{10i+3,5j+1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Sedangkan, pada $n \equiv 3 \pmod 5$ terdapat simpul $x_{10i+3,5j-2} \in A_2$ yang dapat mendominasi 2 simpul, yaitu simpul $x_{10i+3,5j-2}$ dan $z_{10i+3,5j-3}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk m gasal.

Kasus 2: $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$ dengan subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, tetapi jika suatu simpul berada di persimpangan, maka berderajat 3 yang dapat mendominasi 7 simpul, yaitu dua kali tiga simpul tetangga dan satu simpul dirinya sendiri. Simpul $y_{1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 7 simpul, antara lain $x_{1,j+1}; x_{2,j+1}; y_{1,j+1}; y_{2,j+1}; y_{5,j+1}; z_{1,j}$ dan $z_{2,j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $y_{2i+1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 6 simpul yaitu, simpul $x_{2i+1,j+1}; x_{2i+2,j+1}; y_{2i+1,j+1}; y_{2i+2,j+1}; z_{2i+1,j}$ dan $z_{2i+2,j}$ untuk $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $y_{5i-3,1} \in A_2$ dapat mendominasi 5 simpul. Untuk setiap simpul $y_{5i-3,1} \in A_2$ dapat mendominasi antara lain, simpul $x_{5i-2,1}; x_{5i-3,1}; y_{5i-2,1}; y_{5i-3,1}$ dan $y_{5i-4,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk semua $m \in Z^+$.

Setiap simpul $y_{10i-3,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi yaitu, simpul $x_{10i-3,j+1}; x_{10i-2,j+1}; y_{10i-3,j+1}; z_{10i-3,j}$ dan $z_{10i-2,j}$ untuk $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk m genap. Sedangkan, untuk m gasal terdapat simpul yang dapat mendominasi dirinya sendiri, yaitu $y_{10i+1,1} \in A_2$. Pada $m = 3$ terdapat simpul $y_{1,1} \in A_2$ yang dapat mendominasi 5 simpul, yaitu simpul $x_{1,1}; x_{2,1}; y_{1,1}; y_{2,1}$ dan $y_{3,1}$.

Kasus 3: $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^m))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^m)$, untuk setiap simpul di $n \equiv 1$ (mod 5) pada graf lintasan $S_H(P_n^m)$ merupakan graf yang berderajat 2. Sehingga, simpul $z_{10i+3,5j} \in A_2$ dapat mendominasi 3 simpul, antara lain simpul $x_{10i+3,5j}; x_{10i+3,5j+1}$ dan $z_{10i+3,5j}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $z_{10i+3,5j-2} \in A_2$ di $n \equiv 4$ (mod 5) dapat mendominasi 4 simpul, yaitu simpul $x_{10i+3,5j-1}; x_{10i+3,5j-2}; z_{10i+3,5j-2}$ dan $z_{10i+3,5j-3}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk setiap simpul $z_{10i+3,5j-2} \in A_2$ di $n \equiv 0$ (mod 5) dapat mendominasi 5 simpul antara lain, simpul $x_{10i+3,5j-1}; x_{10i+3,5j-2}; z_{10i+3,5j-1}; z_{10i+3,5j-2}$ dan $z_{10i+3,5j-3}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini hanya berlaku untuk m gasal, tetapi tidak berlaku untuk $m = 3$.

Jika $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rfloor$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum untuk $n \equiv 0$ (mod 5) dan $n \equiv 3$ (mod 5), maka andaikan $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rfloor - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} - 1)7 = \frac{7n(13m-4)+7(-m-17)}{25} < \frac{7n(13m-4)+7(-m+8)}{25}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $S_H(C_m \times P_n)$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan simpul $z_{13,3} \notin A_2$, maka simpul $x_{13,2}; z_{13,3}$ dan $z_{13,2}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \nleq \lfloor \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rfloor - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\lfloor \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rfloor - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rfloor$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_m \times P_n)$.

Jika $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lceil \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rceil$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum untuk $n \equiv 1 \pmod 5$ dan $n \equiv 4 \pmod 5$, maka andaikan $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lceil \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rceil - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} - 1)7 = \frac{7n(13m-4)+7(-m-17)}{25} < \frac{7n(13m-4)+7(-m+8)}{25}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $S_H(C_m \times P_n)$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan simpul $z_{13,5} \notin A_2$, maka simpul $x_{13,5}$ dan $z_{13,6}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \nleq \lceil \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rceil - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\lceil \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rceil - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lceil \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rceil$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_m \times P_n)$.

Jika $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25}$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum untuk $n \equiv 2 \pmod 5$, maka andaikan $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} - 1)7 = \frac{7n(13m-4)+7(-m-17)}{25} < \frac{7n(13m-4)+7(-m+8)}{25}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $S_H(C_m \times P_n)$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan simpul $x_{13,6} \notin A_2$, maka simpul $x_{13,5}; x_{13,7}; z_{13,5}$ dan $z_{13,6}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2.

Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \nleq \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25}$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_m \times P_n)$.

5. $m \equiv 4 \pmod 5$

Kasus 1: $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$, dan setiap simpul graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ di graf $S_H(C_m \times P_n)$ terhubung dengan simpul-simpul pada subdivisi homogen graf lintasan $S_H(P_n^m)$, maka untuk setiap $x_{5i,1} \in V(S_H(C_m^n)) \cap V(S_H(P_n^m))$ dapat mendominasi 5 simpul antara lain, simpul $x_{5i-1,1}; x_{5i,1}; x_{5i+1}; y_{5i-1,1}$ dan $y_{5i,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk semua $m \in Z^+$. Pada m gasal terdapat juga simpul $x_{5i+4,1}$ yang dapat mendominasi 5 simpul, yaitu simpul $x_{1,1}; x_{5i+4,1}; x_{5i+4,2}; y_{5i+4,1}$ dan $z_{15i+4,1}$ untuk $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Kasus 2: $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(C_m^n))$ dengan subdivisi homogen graf lingkaran $S_H(C_m^n)$ merupakan graf yang berderajat 2, tetapi jika suatu simpul berada di persimpangan, maka berderajat 3 yang dapat mendominasi 7 simpul, yaitu dua kali tiga simpul tetangga dan satu simpul dirinya sendiri. Simpul $y_{1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 7 simpul, antara lain $x_{1,j+1}; x_{2,j+1}; y_{1,j+1}; y_{2,j+1}; y_{5,j+1}; z_{1,j}$ dan $z_{2,j}$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $y_{2i+1,j+1} \in A_2$ dapat mendominasi 6 simpul yaitu, simpul $x_{2i+1,j+1}; x_{2i+2,j+1}; y_{2i+1,j+1}; y_{2i+2,j+1}; z_{2i+1,j}$ dan $z_{2i+2,j}$ untuk $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $y_{5i-3,1} \in A_2$ dapat mendominasi 5 simpul. Untuk setiap simpul $y_{5i-3,1} \in A_2$ dapat mendominasi antara lain, simpul $x_{5i-2,1}; x_{5i-3,1}; y_{5i-2,1}; y_{5i-3,1}$ dan $y_{5i-4,1}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Pernyataan ini berlaku untuk semua $m \in Z^+$. Untuk $m = 4$ terdapat simpul $y_{4,1} \in A_2$ yang dapat mendominasi 3 simpul, yaitu simpul $x_{3,1}; x_{4,1}$ dan $y_{4,1}$.

Kasus 3: $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^m))$

Ambil simpul di $A_2 \subseteq V(S_H(P_n^m)$, untuk setiap simpul di $n \equiv 1 \pmod 5$ pada graf lintasan $S_H(P_n^m)$ merupakan graf yang berderajat 2. Sehingga, simpul $z_{5i+4,5j} \in A_2$ dapat mendominasi 3 simpul, antara lain simpul $x_{5i+4,5j}; x_{5i+4,5j+1}$ dan $z_{5i+4,5j}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Setiap simpul $z_{5i+4,5j-2} \in A_2$ di $n \equiv 4 \pmod 5$ dapat mendominasi 4 simpul, yaitu simpul $x_{5i+4,5j-1}; x_{5i+4,5j-2}; z_{5i+4,5j-2}$ dan $z_{5i+4,5j-3}$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dan $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Untuk setiap simpul $z_{5i+4,5j-2} \in A_2$ di $n \equiv 0 \pmod 5$ dapat mendominasi 5 simpul antara lain, simpul $x_{5i+4,5j-1}; x_{5i+4,5j-2}; z_{5i+4,5j-1}; z_{5i+4,5j-2}$ dan $z_{5i+4,5j-3}$ dengan

$i \in \{1,2,3,...,n\}$ dan $j \in \{1,2,3,...,n\}$. Pernyataan ini hanya berlaku untuk $m \in Z^{+}$.

Jika $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor \frac{2n(6m+1)+4(-m+4)}{25} \rfloor$ bilangan dominasi jarak dua yang minimum, maka andaikan $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor \frac{2n(6m+1)+4(-m+4)}{25} \rfloor - 1$. Karena setiap simpul di A_2 maksimum dapat mendominasi 7 simpul yaitu dua kalinya simpul yang bertetangga dan dirinya sendiri, maka banyak simpul maksimum yang dapat didominasi adalah

$$(\frac{2n(6m+1)+4(-m+4)}{25} - 1)7 = \frac{14n(6m+1)+28(-m-2)}{25} < \frac{14n(6m+1)28(-m+4)}{25}.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul $S_H(C_m \times P_n)$ yang terdominasi, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Misalkan simpul $y_{3,2} \notin A_2$, maka simpul $x_{3,2}; x_{4,2}; z_{3,1}$ dan $z_{4,1}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen A_2.

Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \nleq \lfloor \frac{2n(6m+1)+4(-m+4)}{25} \rfloor - 1$. Dengan demikian bilangan dominasinya pasti lebih besar $\lfloor \frac{2n(6m+1)+4(-m+4)}{25} \rfloor - 1$. Jadi, pengandaian salah, sehingga terbukti bahwa $\gamma_2(S_H(C_m \times P_n)) \leq \lfloor \frac{2n(6m+1)+4(-m+4)}{25} \rfloor$ merupakan bilangan dominasi jarak dua yang minimum pada $S_H(C_m \times P_n)$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa himpunan dominasi jarak dua untuk graf $S_H(D_{m,n})$ atau graf $S_H(C_m \times P_n)$ adalah $A_2 = \{x_{5i,1}; y_{1,j+1}; y_{2i+1,j+1}y_{5i-3,1} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{5i+4,1}; x_{10i-5,1}; x_{10i-3,1}; x_{10i+1,1}; x_{10i+3} | 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{10i-5,5j}; x_{10i-3,5j}; x_{10i+1,5j}; x_{10i+3,5j} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{10i-5,5j+1}; x_{10i-3,5j+1}; x_{10i+1,5j+1}; x_{10i+3,5j+1} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{10i-5,5j-2}; x_{10i-3,5j-2}; x_{10i+1,5j-2}; x_{10i+3,5j-2} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,1}; x_{10i+2,1} | 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_{10i-1,j+1}; y_{10i+1,1} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{10i-5,j+1}; y_{10i-3,j+1}; y_{10i+1,j+1} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{1,1}; y_{4,1}\} \cup \{z_{5i+4,5j}; z_{10i-5,5j}; z_{10i-3,5j}; z_{10i+1,5j}; z_{10i+3,5j} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{z_{5i+4,5j-2}; z_{10i-5,5j-2}; z_{10i-3,5j-2}; z_{10i+1,5j-2}; z_{10i+3,5j-2} | 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\}$.

BAB V

SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian mengenai bilangan dominasi jarak satu dan dua, baik pada graf prisma maupun subdivisi homogen graf prisma diperoleh hasil sebagai berikut.

1. Graf Prisma memiliki bilangan dominasi jarak dua

$$\gamma_2(C_m \times P_n)) = \begin{cases} \lceil \frac{mn}{8} \rceil & \text{jika } m \geq 3;\ n = 2 \\ \lceil \frac{m(n+1)}{12} \rceil & \text{jika } m \geq 3;\ n \equiv 0 \text{ (mod 3)} \\ \lfloor \frac{m(n+1)+12}{12} \rfloor & \text{jika } m \geq 3;\ n \equiv 1 \text{ (mod 3)} \\ & \text{atau } m \equiv 0 \text{ (mod 3)};\ n \equiv 2 \text{ (mod 3)} \\ & \text{atau } m \equiv 2 \text{ (mod 3)};\ n \equiv 2 \text{ (mod 3)} \\ \lceil \frac{m(n+1)+12}{12} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 3)};\ n \equiv 2 \text{ (mod 3)} \end{cases}$$

2. Subdivisi Homogen Graf Prisma yang memiliki bilangan dominasi jarak satu

$$\gamma(S_H(C_m \times P_n)) = \begin{cases} \lfloor \frac{3(m-1)}{2} \rfloor + n & \text{jika } m \geq 3;\ n = 2 \\ \frac{m(7n-3)+9n}{9} & \text{jika } m \equiv 0 \text{ (mod 3)};\ n \equiv 0 \text{ (mod 3)} \\ \lceil \frac{m(7n-1)+3(n+1)}{9} \rceil & \text{jika } m \equiv 0 \text{ (mod 3)};\ n \equiv 1 \text{ (mod 3)} \\ & \text{atau } m \equiv 2 \text{ (mod 3)};\ n \equiv 1 \text{ (mod 3)} \\ \frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9} & \text{jika } m \equiv 0 \text{ (mod 3)};\ n \equiv 2 \text{ (mod 3)} \\ \frac{m(7n-3)+9(n-1)}{9} & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 3)};\ n \equiv 0 \text{ (mod 3)}; \\ & \text{atau } m \equiv 2 \text{ (mod 3)};\ n \equiv 0 \text{ (mod 3)}; \\ \lfloor \frac{m(7n-1)+3(n+1)}{9} \rfloor & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 3)};\ n \equiv 1 \text{ (mod 3)} \\ \lfloor \frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9} \rfloor & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 3)};\ n \equiv 2 \text{ (mod 3)} \\ \lceil \frac{m(7n-2)+6(n+1)}{9} \rceil & \text{jika } m \equiv 2 \text{ (mod 3)};\ n \equiv 2 \text{ (mod 3)} \end{cases}$$

3. Subdivisi Homogen Graf Prisma yang memiliki bilangan dominasi jarak dua

$$\gamma_2(C_m \times P_n) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{n(13m-5)+(-m+5)}{25} \rfloor & \text{jika } m \equiv 0 \text{ (mod 5); } n \leq 3 \\ \frac{3n(4m+1)+4(-m+6)}{25} & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 5); } n \leq 3 \\ \lfloor \frac{n(13m-6)+(-6m+47)}{25} \rfloor & \text{jika } m \equiv 2 \text{ (mod 5); } n \leq 3 \\ \lfloor \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rfloor & \text{jika } m \equiv 3 \text{ (mod 5); } n \equiv 0 \text{ (mod 5)} \\ & \text{atau } m \equiv 3 \text{ (mod 5); } n \equiv 3 \text{ (mod 5)} \\ \lceil \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} \rceil & \text{jika } m \equiv 3 \text{ (mod 5); } n \equiv 1 \text{ (mod 5)} \\ & \text{atau } m \equiv 3 \text{ (mod 5); } n \equiv 4 \text{ (mod 5)} \\ \frac{n(13m-4)+(-m+8)}{25} & \text{jika } m \equiv 3 \text{ (mod 5); } n \equiv 2 \text{ (mod 5)} \\ \frac{2n(6m+1)+4(-m+4)}{25} & \text{jika } m \equiv 4 \text{ (mod 5); } n \leq 3 \end{cases}$$

4. Bilangan dominasi subdivisi homogen jarak satu dari sebuah graf selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan dominasi subdivisi homogen jarak dua. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $\gamma_1(S_H(G)) \geq \gamma_2(S_H(G))$.

5. Bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua pada suatu graf prisma dan subdivisi homogennya tidak memiliki relasi atau perbandingan secara umum. Hal ini dikarenakan oleh beberapa faktor, seperti jarak antar simpul, pemilihan simpul elemen himpunan dominasi, derajat setiap simpul, dan sebagainya.

5.2 Saran

Pada penelitian ini bilangan dominasi yang diperoleh dari graf prisma dan subdivi homogennya masih sebatas satu cara pelekatan simpul. Oleh karena itu, bagi para peneliti yang ingin melanjutkan penelitian tentang bilangan dominasi pada graf disarankan untuk mencari bilangan dominasi pada graf prisma dan subdivisi homogennya dengan aturan pelekatan simpul secara umum dengan graf-graf yang lebih beragam atau dapat menggunakan jenis operasi yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Alfarisi, Ridho, dkk. (2014), ”Analisa Himpunan Dominasi pada Graf-Graf Khusus”. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*.

Ardiansyah, dkk., (2010), ”Implementasi Algoritma Greedy Untuk Melakukan Graph Coloring: Studi Kasus Peta Provinsi Jawa Timur”, *Jurnal Informatika*, Vol.4, hal.440-441.

Baca, M and Miller, M. (2008), *Super Edge-Antimagic Graphs: A Wealth of Problem and Some Solution*. Florida: Brown Walker Press.

Chartrand, G., and Lesniak, L., (1986), *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Chartrand, G., and Ping, Z., (2005), *Introduction To Graph Theory*. New York: McGraw-Hill International Edition.

Goddard, W., Henning, M.A. (2006), *Independent Domination in Graphs: A Survey and Recent Results*”, University of Johannesburg, South Africa.

Gupta, P., (2013), ”Domination in Graph with Application”, *Indian Journal of Research*, Vol.2, pp.115-117.

Gross, Jonatan L., Jay Yellen. 2006. *Graph Theory and Its Applications*, 2ed. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC.

Hartsfield, N., and Gerhard, R., (1994), *Pearls in Graph Theory A Comprehensive Introduction*. United States of America: Academic Press, Inc.

Haynes, W. Teresa. (1996), ”Fundamental of Dominations in Graphs”, New York: Marcel Dekker, Inc.

Jumani, A. D and Chand, L., (2012), ”Domination Number of Prism over Cycle

C_n", *Sindh Univ. Res. Jour. (Sci. Ser.)*, Vol.44, No.2, pp.237-238.

Rofiah, M. dan Dafik. (2014), "Kajian Himpunan Dominasi pada Graf Khusus dan Operasinya". *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember*, 1 (1).

Saputro, Hendry Dwi. (2015), *Dominating Set pada Hasil Operasi Graf Khusus dan Aplikasinya*. Skripsi. Jember: Universitas Jember.

Siang, J. J. (2009), *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer*. Jogjakarta: Andi.

Synder, K., (2011), "c-Dominating Sets for Families of Graphs", University of Mary Washington.

Umilasari, Reni. (2015), *Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf-graf Hasil Operasi Korona dan Comb*. Tesis. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

BIOGRAFI PENULIS

Penulis bernama Trisna Rusdiana Dewi, lahir di Kediri, 24 Agustus 1992, merupakan putri pertama dari dua bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di SDN Bringin Bendo I (1998-2004), SMPN 2 Taman (2004-2007) dan SMA Wachid Hasyim 2 Taman (2007-2010). Setelah lulus dari SMA penulis melanjutkan studi ke Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas PGRI Adi Buana Surabaya 2010 hingga akhirnya dinyatakan lulus pada bulan Oktober 2014 dan mendapat predikat *Cum Laude*. Kemudian penulis melanjutkan studi magister di Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Bidang minat yang ditekuni penulis selama studi baik S1 maupun S2 adalah Teori Graf. Untuk kritik dan saran yang berhubungan dengan tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui e-mail: trisnabunny@gmail.com